

EQUAZIONI DI MAXWELL

• Teorema di Gauss $\text{div } \underline{D} = \rho_{\text{libere}}$

• Legge di Faraday-Neumann, Lenz $\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

• \underline{B} è solenoide $\text{div } \underline{B} = 0$

• Teorema di Ampere $\text{rot } \underline{H} = \underline{J}$

• Relazioni costitutive del materiale $\Rightarrow \underline{D} = \epsilon \underline{E}$

$\Rightarrow \underline{B} = \mu \underline{H}$

$\Rightarrow \underline{J} = \sigma \underline{E}$

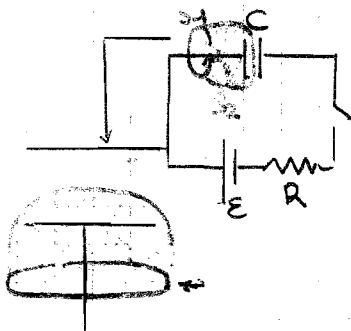
• Queste equazioni fanno parte del sistema di equazioni di Maxwell, ma scritto così non è completo perché

$$0 = \text{div rot } \underline{H} = \text{div } \underline{J}$$

↓
LA DIV DEL ROTORE

↳ Ma l'equazione di continuità dice $\text{div } \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

⇒ Il teorema di Ampere è stato scritto per fenomeni stazionari, non per campi elettrici variabili nel tempo



$$\oint_C \underline{H} \cdot d\underline{e} = I = \iint_{S_1} \underline{J} \cdot \underline{n} d\sigma$$

↳ (PERCHÉ IN REALTÀ È FLU FORNITO)

Ma lungo S2 non interseca il circuito

$$\oint_C \underline{H} \cdot d\underline{e} = \iint_{S_2} \underline{J} \cdot \underline{n} d\sigma = 0$$

• Cerco un vettore \underline{u} tale che

$$\underline{u} = \underline{J} + \underline{J}' \quad \text{nel caso generale}$$

$$\underline{u} = \underline{J} \quad \text{nel caso stazionario}$$

$$\text{div}(\underline{J} + \underline{J}') = 0$$

• Applico il teorema di Ampere considerando \underline{u} al posto di \underline{J}

$$\text{div rot } \underline{H} = \text{div } \underline{u} = 0$$

$$\text{div } \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \underline{D} = -\text{div } \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \left(\underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) = 0$$

↳ $\underline{J}' = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ CORRENTI DI SPOSTAMENTO

$$\Rightarrow \text{rot } \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

completo il sistema di eq di Maxwell

Esempio: considero ancora il circuito RC

$$\mathcal{E}_0 = RI(t) + \frac{q(t)}{C}$$

$$\mathcal{E}_0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$RC \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = \mathcal{E}_0 C$$

$$\frac{dq}{\mathcal{E}_0 C - q} = \frac{dt}{RC}$$

$$-\ln(\mathcal{E}_0 C - q) = -\frac{t}{RC} + \text{cost}$$

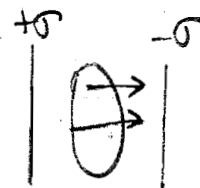
$$\mathcal{E}_0 C - q = A e^{-t/RC}$$

Impongo le condizioni iniziali $\Rightarrow A = \mathcal{E}_0 C$ ($q(0) = 0$)
 $q(t) = \mathcal{E}_0 C (1 - e^{-t/RC}) \rightarrow I(t) = \mathcal{E}_0 C e^{-t/RC}$

$I(t) = \sigma(t)$ CAMPO ELETTRICO VARIABILE

$$\Phi(D) = \iint_S \underline{D} \cdot \underline{n} d\sigma = \iint_S \underline{\sigma} \cdot \underline{n} d\sigma = S \sigma$$

Derivando $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$ (DIVERG. DI CORRENTE)



- Nel conduttore è il flusso di cariche che sostiene la corrente, in S₂ cioè il flusso del vettore \underline{D} che chiude il circuito ed è dovuto alla variazione di cariche sul condensatore
- Infatti noto che la corrente nel condensatore, $\frac{\partial \underline{D} \cdot \underline{S}}{\partial t}$, è pari alla corrente di conduzione
- Il sistema di equazioni di Maxwell è ridondante: ho 17 equazioni in 16 incognite.
- È un sistema non omogeneo, le equazioni sono accoppiate, per risolverlo devo disaccoppiarlo

• Nel vuoto $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E}$

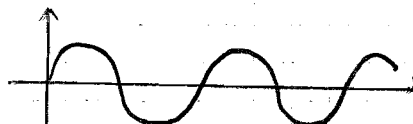
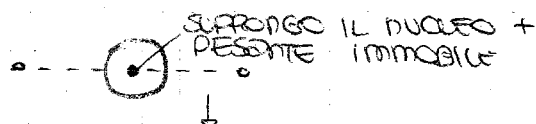
$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

• In un dielettrico $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$ \rightarrow polarizzato

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial t}$$

- Come nasce il termine $\frac{\partial \rho}{\partial t}$? \rightarrow Densità di corrente delle cariche legate

Ho un nucleo e un campo $E(t)$



L'elettrone si sposta sotto l'azione di E e nasce $p = -e\delta(t)$

In totale $\frac{dP}{dt} = n \frac{dp}{dt} = nq \frac{d\delta}{dt} = nq \underline{v} \Rightarrow$ DENSITÀ DI CARICHE DI RUOTA ELETTRICHE

- Non compaiono le correnti di magnetizzazione perché H non dipende da b_0 , cerca il rotore di B :

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{J} + \underline{J}_G + \underline{J}_P$$

$$\underline{B} = \mu \underline{H} + \underline{M}$$

$\text{rot } \underline{B} = \mu \text{rot } \underline{H} + \text{rot } \underline{B} \rightarrow$ IL ROTORE DI B SONO LE CORR DI MAG

$$\text{rot } \underline{B} = \mu (\underline{J} + \underline{J}_G + \underline{J}_P + \underline{J}_M)$$

- Applico la divergenza

$$\text{div rot } \underline{B} = \mu (\text{div } \underline{J} + \text{div } \underline{J}_G + \text{div } \underline{J}_P + \text{div } \underline{J}_M)$$

$$= \mu \left(\underbrace{-\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\underline{J}} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\underline{J}_G} - \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\underline{J}_P} + \underbrace{0}_{\underline{J}_M} \right) = 0$$

- Nel sistema di equaz ci sono 3 teoremi di conservazione



1. CONSERVAZIONE DELLA CARICA

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$0 = \text{div rot } \underline{H} = \text{div } \underline{J} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \underline{D} = \text{div } \underline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{div } \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \text{eqv di continuità}$$

POYNTING (E)

2. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Ho un e^- che viene frenato da un campo elettromagn: perde energia emettendo onde elettromagn.

(La sua qam viene assorbita dal campo)

Scrivo il TEOREMA DI POYNTING

Prendo un volume V contenente cariche nel quale esiste un campo elettromagnetico che esercita forze sulle cariche

Nell'unità di volume la forza è:

$$\underline{f} = Nq (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

Moltiplico scalarmente per \underline{v} (nota che \underline{B} non compie lavoro)

$$\underline{f} \cdot \underline{v} = Nq \underline{v} \cdot \underline{E} = \underline{j} \cdot \underline{E} \quad \text{DENSITA' DI POTENZA SPESA DA \underline{E} SULL'UNITA' DI V}$$

I watt totali spesi per effetto Joule

$$P_J = \int_V \underline{j} \cdot \underline{E} \, dV$$

$$\text{Ma lo so che } \underline{j} = \text{rot } \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$-\text{div}(\underline{E} \times \underline{H}) + \underline{H} \cdot \text{rot } \underline{E} = \underline{E} \cdot \text{rot } \underline{H}$$

$$\begin{aligned} P_J &= \int_V \underline{E} \cdot \text{rot } \underline{H} \, dV - \int_V \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \, dV \\ &= \int_V \underline{H} \cdot \text{rot } \underline{E} \, dV - \int_V \text{div}(\underline{E} \times \underline{H}) \, dV - \int_V \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \, dV \\ &= \int_V \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \, dV - \oint_S (\underline{E} \times \underline{H}) \cdot d\vec{\sigma} - \int_V \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \, dV \end{aligned}$$

Io so che

$$\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = W_e$$

$$\frac{1}{2} \underline{H} \cdot \underline{B} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = W_m$$

Chiamo VETTORE DI POINTING $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$

$$P_J = - \oint_S (\underline{E} \times \underline{H}) \cdot d\vec{\sigma} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V (W_e + W_m) \, dV$$

$$W_e + W_m = W_{em}$$

$$P_J = - \oint_S \underline{S} \cdot d\vec{\sigma} - \frac{\partial W_{em}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = P_J + \oint_S \underline{S} \cdot d\vec{\sigma}$$

↓ FLUSSO NETTO USCENTE

$$-\oint_S \underline{S} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\partial W_{em}}{\partial t} + P_J$$

FLUSSO ENTRANTE: IN PARTE VIENE SPESO X EFFETTO JOULE, IN PARTE FA AUMENTARE W_{em}

Deduco che il campo elettromagnetico trasporta l'energia necessaria per produrlo.

Il teorema ha validità generale: parte dell'energia viene dissipata e parte irradiata attraverso la superficie.

3. conservazione dell'energia

Densità di forza dell'unità di volume

$$\underline{F} = Nq (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

$$d\underline{F} = dV \cdot Nq (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

$$d\underline{F} = \underline{f} dV = (\underline{\rho} \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}) dV \quad \text{ovvero il punto } \underline{j} = Nq \underline{v} \quad \underline{\rho} = Nq$$

Integro

$$\underline{F} = \int \underline{\rho} \underline{E} dV + \int (\underline{j} \times \underline{B}) dV$$

Inoltre valgono le relazioni $\underline{\rho} = \text{div } \underline{D}$ e $\underline{j} = \text{rot } \underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$

$$\underline{F} = \int \underline{E} \text{div } \underline{D} dV + \int (\text{rot } \underline{H} \times \underline{B}) dV - \int \left(\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \times \underline{B} \right) dV$$

$$\underline{E} \text{div } \underline{D} + \underline{H} \text{div } \underline{B} + \text{rot}(\underline{H}) \times \underline{B} + \text{rot } \underline{E} \times \underline{D} - \text{rot } \underline{E} \times \underline{D} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \times \underline{B}$$

\downarrow
 LO AGGIUNGO TUTT
 $\text{div } \underline{B} = 0$

\downarrow
 AGGIUNGO E TOGLIO

NB:
 $-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \text{rot } \underline{E}$

Da cui

$$\underline{E} \text{div } \underline{D} + \underline{H} \text{div } \underline{B} + \text{rot } \underline{H} \times \underline{B} + \text{rot } \underline{E} \times \underline{D} - \frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \times \underline{B})$$

Li chiamo Σ

$$\underline{F} = \int \Sigma dV - \frac{\partial}{\partial t} \int \underline{D} \times \underline{B} dV$$

(Posso portare fuori
dall'integrale la derivata
× K V non varia nel tempo)

CERCO UN VETTORE CHE HA Σ COME DIVERGENZA: NOTO CHE Σ DIPENDE QUADRATICAMENTE DA \underline{E} E DA \underline{B} ($\propto r^{-4}$)

INTEGRALE DELL'INDIC. O TEMPORALE DEI SEGRETI DI MAXWELL
 \underline{E} E \underline{B} SONO 2: HO PER OSSERVAZIONE FATTO SE CONSIDERO UNA
 SUPERFICIE GRANDE $r^{-4} \rightarrow 0$, TRASCURA!)

$$\underline{F} = -\frac{\partial}{\partial t} \int (\underline{D} \times \underline{B}) dV$$

Poi ho $\underline{F} = \frac{\partial G^M}{\partial t} \rightarrow G^M$ è la QUANTITÀ DI MOTO MECCANICO

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(G^M + \int (\underline{D} \times \underline{B}) dV \right)$$

Quindi $G^M + \int_V (\underline{D} \times \underline{B}) dv = \text{cost}$

$(\underline{D} \times \underline{B}) = \epsilon \mu \underline{S} = \underline{g}^{EM}$ DENSITA' DI QDM MAGNETICO
 VETTORE DI POYNTING

$G^M + \int_V \underline{g}^{EM} dv = \underline{G}^M + \underline{G}^{EM} = \text{cost}$

LA SOMMA FRA QDM MECCANICA ED ELETTROMAGN. E' COSTANTE

IMPULSO ELETTROMAGN.

1. POTENZIALI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Se $\text{div } \underline{B}(t) = 0$ allora posso dire $\underline{B}(t) = \text{rot } \underline{A}(r, t)$

Considero $\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \underline{A}(r, t)$

Da cui

$\text{rot}(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \underline{E}$ un vettore irrotazionale, quindi conservativo, posso scriverlo come gradiente

$\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\text{grad } \psi(r, t)$

$\underline{E} = -\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \text{grad } \psi(r, t)\right)$ Nel caso di condiz. stazionarie $\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = 0$

POTENZIALE VETTORIALE ELETTROMAGNETICO

POTENZIALE SCALARE ELETTROMAGNETICO

comunque \underline{A} ed ψ non sono univocamente determinati, infatti se scelgo

$\underline{A}' = \underline{A} + \text{grad } \psi$ va comunque bene

\Rightarrow ho infinite possibilità, qst perché sono grandezze di campo, hanno reale significato fisico solo \underline{B} ed \underline{E}

Posso farlo x:

$-\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \text{grad } \psi = -\frac{\partial \underline{A}'}{\partial t} - \text{grad } \psi' = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \text{grad } \psi'$

$-\text{grad}(\psi') = -\text{grad}(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial t}) \Rightarrow$ TRASFORMATE DI GAUGE

Per sceglierlo impongo

$\text{div } \underline{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ CONDIZIONE DI LORENTZ

E' una delle possibili scelte. Per fenomeni stazionari vale

$\text{div } \underline{A} = 0 \Rightarrow$ CONDIZIONE DI COULOMB

- Come dipendono A e φ dalle sorgenti ρ e \underline{J} ?

Considero un mezzo omogeneo e lineare.

$$\text{div } \underline{D} = \rho$$

$\text{div } \underline{\epsilon} \underline{E} = \rho$ $\underline{\epsilon}$ non dipende dal punto, posso portarlo fuori

$$\text{div } \underline{E} = \frac{\rho}{\underline{\epsilon}}$$

Ma avevo scritto $\underline{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \varphi(t)$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \underline{A} - \text{div grad } \varphi(t) = \frac{\rho}{\underline{\epsilon}}$$

Sostituisco alla divergenza di \underline{A} la condizione di Lorentz

$$\underline{\epsilon} \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\underline{\epsilon}} \quad \left(\text{nel caso di fenomeni statici: } -\nabla^2 \varphi = \rho / \underline{\epsilon} \right)$$

- Per \underline{B} vale: $\text{rot } \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$, $\underline{\mu} \underline{H} = \underline{B}$, $\underline{D} = \underline{\epsilon} \underline{E}$

$$\text{rot } \underline{B} = \underline{\mu} \underline{J} + \underline{\epsilon} \mu \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \underline{A} = \underline{\mu} \underline{J} + \underline{\epsilon} \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right)$$

$$\text{grad div } \underline{A} - \nabla^2 \underline{A} = \underline{\mu} \underline{J} - \underline{\epsilon} \mu \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \underline{\epsilon} \mu \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\text{grad} \left[\text{div } \underline{A} + \underline{\epsilon} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \nabla^2 \underline{A} = \underline{\mu} \underline{J} - \underline{\epsilon} \mu \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}$$

Da cui

$$\nabla^2 \underline{A} - \underline{\epsilon} \mu \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = -\underline{\mu} \underline{J}$$

Le soluzioni sono:

$$\varphi(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi \underline{\epsilon}} \int_V \frac{\rho(\underline{x}', t')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} dV'$$

$$\underline{A}(\underline{x}, t) = \frac{\underline{\mu}}{4\pi} \int_V \frac{\underline{J}(\underline{x}', t')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} dV'$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \text{Per } t \neq t' \\ &t' = t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v} \quad \text{con} \\ &v = \frac{1}{\sqrt{\underline{\epsilon} \underline{\mu}}} \end{aligned}$$

Se sono nel vuoto $v = (\underline{\epsilon} \underline{\mu})^{-1/2} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c$

L'effetto della variazione si propaga con velocità v

\Rightarrow Per questo si chiamano **POTENZIALI RITARDATI**

• Sono anche detti **POTENZIALI DI LENDULO WIECHART**

Equazione generale delle onde

- Per risolvere il sistema di eq di Maxwell separate variabili

$$\text{rot rot } H = \text{rot } \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\underline{\epsilon} E) \quad (\underline{j} = \sigma E)$$

Prendiamo uno spazio riempito da un materiale lineare, omogeneo, isotropo, all'interno del quale non esistono accumuli di carica.

Per ora il mezzo può essere anche conduttore, in seguito dimostreremo che sono legittimi i dielettrici

$$\text{grad div } H - \nabla^2 H = \sigma \text{rot } E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } E$$

Io so $0 = \text{div } B = \mu \text{div } H$ quindi mi resta

$$-\nabla^2 H = -\sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t})$$

Equazione: diff per H (e quindi per B)

$$\nabla^2 H - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{Impongo la condizione di contorno e risolvo}$$

- La cerco per E

$$\text{rot rot } E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } H = -\mu \frac{\partial}{\partial t} [\sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}]$$

$$\text{grad div } E - \nabla^2 E = -\sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

↓

$$\text{div } D = 0 \\ \Rightarrow \text{div } E = 0$$

Equazione diff per E

$$\nabla^2 E - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

- Se considero un dielettrico o un isolante $\sigma = 0$ (non ha conducibilità)

$$\nabla^2 E - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 H - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

→ Non ci sono sorgenti: il campo è stato prodotto altrove.

- Per qualunque componente vale l'equazione: la chiamo u

Scelgo per semplicità $E(x,t)$ e $H(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Equazione delle onde
univariante di elettromagnetismo

- La soluzione generale è:

$$u(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \quad \text{con} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

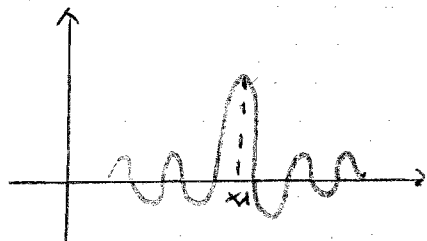
Potenzio $x - vt = \xi$ $x + vt = \eta$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2}$$

E analogam $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} \right) = \frac{1}{\epsilon \mu} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} \right)$

• Rappresento f_1



t_2

Al tempo t_2 il massimo si ha in corrisp di x_2 : siccome il mezzo non è distortente

$$t_2 = t_1 + \Delta t$$

$$f_1(x_1 - vt_1) = f_1(x_2 - vt_2)$$

Allora gli arg sono uguali!

$$x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2 - v \Delta t$$

$$x_2 - x_1 = v \Delta t$$

↳ L'ONDA SI PROPAGA NEL VERSO DELLE ASCISSE POSITIVE → PROGRESSIVA O ONDA INCIDENTE

• Si dimostra similmente che f_2 si propaga nel verso delle ascisse negative → REGRESSIVA ⇒ ONDA DIFFERENTE

• Ora impongo delle relazioni per trovare le cost C l'eq di Delambert infatti non sono sol di Maxwell se derivando ho perso delle condiz

$$E_x(x, t) = E_x(x - vt)$$

$$E_y(x, t) = E_y(x - vt)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

E_x ed H_x non dipendono esp da x .

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu H_x'$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \nu \mu H_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \nu \mu H_z$$

Da cui

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\bullet \operatorname{rot} \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \nu \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \nu \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\epsilon \nu \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

• ONDA PIANO: IL CAMPO \vec{E} e \vec{B} SONO COSTANTI SU OGNI PIANO PERPENDICOLARE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE.
 $\vec{B} \perp \vec{H} \perp \vec{z}$

Osservo che E_x e H_x sono costanti (non dipendono ne da x ne da t):
 siccome io cerco solo variabili nel tempo lepongo nulle

$$E_x = H_x = 0$$

Inoltre de' una coord in + perché il sistema era ridondante

$$H_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y$$

$$H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_z$$

$$\underline{H}(x,t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{z} \times \underline{E}(x,t)$$

onda trasversa

la direzione di propagazione è sempre \perp ai vettori che caratterizzano l'onda

⇒ CAMPO ELETTRICO, MAGNETICO E DIREZIONE DI PROPAGAZIONE FORMANO UNO TERNO AUTONOMO

Si usa caratterizzare un mezzo con l'INDICE DI RIFRAZIONE

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$$

siccome $c > v$, $\Rightarrow n > 1$.

I mezzi trasparenti hanno $\mu_r = 1 \pm 10^{-4}$

Quindi posso dire $n = \sqrt{\epsilon_r}$

Ma l'acqua ha $\epsilon_r \approx 81$, $n \approx 9$ (circa 1.5): questo perché ϵ_r non è costante in base alla frequenza dell'onda.

$$\Rightarrow v = v(\nu)$$

Ogni onda viaggia con una particolare v a seconda della sua frequenza.

Solo nel vuoto (che non esiste!) propagano tutte con la stessa velocità.

La discrepanza va ricercata nel fatto che ϵ_r viene calcolato dalla polarizzabilità elettrica della sostanza sotto l'azione di campi elettrici costanti, ma i campi elettrici della radiazione luminosa sono variabili con $\nu \approx 10^{15}$.

$$n = n(\nu)$$

le mezzi sono dispersivi

L'approssimazione $n = \sqrt{\epsilon_r}$ vale meglio quando $\nu \rightarrow 0$ ossia $\lambda \rightarrow \infty$ (sono quasi in presenza di campi elettrostatici)

ONDE PIANE SINUSOIDALI

• Supponiamo che $\vec{E} = E_y$, siccome $\vec{H} \perp \vec{E} \rightarrow \vec{H} = H_z$

• Scelgo \vec{E} come onda monocromatica \Rightarrow SEGNALE ELETTRONICO CON UN UNICO FREQU

$$E_y = E_{0y} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \beta \right]$$

• Verifica la rel $H_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y$

• Chiatura qst onda non esiste xk si propaga all'infinito.

• Qualunque fenomeno elettromagnetico può essere visto come somma continua o discreta di onde sinusoidali \rightarrow FOURIER

$\lambda \rightarrow$ LUNGHEZZA D'ONDA  $\frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = n \cdot 2\pi$

$\beta \rightarrow$ FASE INIZIALE

L'intervallo di tempo che intercorre affinché nel punto x_1 ritrovo lo stesso valore di E_y che avevo al tempo t_1
 \rightarrow PERIODO T

$$\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} vt_1 \right] = \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} vt_2 \right] \quad T = \Delta t = \frac{\lambda}{v} \quad \rightarrow \text{NEL VUOTO } \Delta t = \frac{\lambda_0}{c}$$

Definisco Frequenza

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda}$$

[Hz]

È una proprietà imposta dalla sorgente: non cambia se l'onda attraversa mezzi diversi (trascuro l'effetto Doppler):
Cambiano v e λ ma non ν !

$$\nu \lambda = v$$

$$\nu \lambda_0 = c$$

$$v = \frac{c}{n}$$

Chiamo Pulsazione

$$\omega = 2\pi \nu$$

[rad/s]

Con queste definizioni possiamo riscrivere l'espressione dell'onda.

$$E_y = E_{0y} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} \nu t + \beta \right]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$E_y = E_{0y} \cos [kx - \omega t + \beta]$$

spazio

tempo

$$\varphi = kx - \omega t + \beta$$

fase
spaziale

fase
temporale

→ LE SUPERFICI DI FASE
COSTANTE SONO PIANI
⊥ ALL'ASSE X

Supponiamo

$$kx - \omega t + \beta = c_1$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = 0$$

$$k \cdot \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi \nu \lambda}{2\pi} = v$$

SE SI PROPAGA LUNGO \hat{u} GENERICO.



\hat{u} : DIREZIONE PROPAGAZIONE ONDA

\underline{k} : VETTORE PROPAGAZIONE ONDA

$$\underline{u} \cdot \underline{x}_1 = \underline{u} \cdot \underline{x}_2 = c_1$$

$$\underline{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{u}$$

$$\varphi = (\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \beta)$$

$$\underline{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{u} \times \underline{E}$$

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \beta) \perp \hat{u}$$

RAPPRESENTAZIONE COMPLESSO DELL'ONDA

Passo alla rapp complessa $u(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \beta)$

$$u(x,t) = A e^{i(kx - \omega t + \beta)}$$

Nel caso si propaghi in più direzioni

$$\underline{E}(r,t) = \underline{E}_0 e^{i[k \cdot r - \omega t + \beta]}$$

$$\underline{H}(r,t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{E}_0 e^{i[k \cdot r - \omega t + \beta]}$$

La parte fisica, misurabile è quella reale.

ES Onde piane monocromatiche in un mezzo conduttore

$$\nabla^2 E - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \psi(x,t) = \phi(x) e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot e^{-i\omega t} + \omega^2 \epsilon \mu \phi(x) e^{-i\omega t} + i\omega \sigma \mu \phi(x) e^{-i\omega t} = 0$$

Impongo che sia un'onda piana $\phi(x) = A e^{i\gamma x}$ (quest'è la sol!)
 $-\gamma^2 A e^{i\gamma x} + \omega^2 \epsilon \mu A e^{i\gamma x} + i\omega \sigma \mu A e^{i\gamma x} = 0$

$$\gamma^2 - \omega^2 \epsilon \mu - i\omega \sigma \mu = 0$$

γ è un numero complesso $\gamma = \alpha + i\beta \quad \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu \\ 2\alpha\beta = \omega \sigma \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = \omega^4 \epsilon^2 \mu^2 \\ 4\alpha^2\beta^2 = \omega^2 \sigma^2 \mu^2 \end{cases}$$

$$\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = \omega^4 \epsilon^2 \mu^2 + \omega^2 \sigma^2 \mu^2$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = \omega^4 \epsilon^2 \mu^2 + \omega^2 \sigma^2 \mu^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \frac{\omega \sigma \mu}{2\alpha}$$

Ho 2 sol: ONDA INCIDENTE e DIFF

$$\psi = A e^{-\beta x} e^{i(\alpha x - \omega t)}$$

\downarrow COSTANTE DI PENETRAZIONE COEF DI TRANSMISSIONE

COSTANTE DI PENETRAZIONE: l'onda muove elettroni in un conduttore e dunque si ha una corrente di conduzione che dissipa energia

Semplifichiamo l'espressione nel caso di un buon conduttore $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right]^{1/2} = \pm \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon\omega}} = \pm \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

$$\beta = \frac{\omega\sigma\mu}{2\alpha} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

→ DESCRIVE LO SKIN-EFFECT (L'ATTENUAZIONE) (ASSORBIMENTO)

DOPO CHE L'ONDA PERCORRE QUESTO SPAZIO $A' = Ae^{-1}$

Esempio: argento

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\sigma = 3 \cdot 10^8 \text{ ohm}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\mu = \mu_0$$

$$\delta = 10^{-6} \text{ m}$$

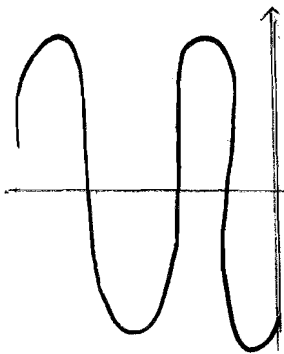
Più è alta la frequenza, maggiore è l'assorbimento (δ diminuisce)

Se ϵ è un cattivo conduttore $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \ll 1$

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right]^{1/2} = \pm \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot [1+1]^{1/2} = \pm \omega \sqrt{\epsilon\mu}$$

$$\beta = \frac{\omega\sigma\mu}{2\alpha} = \frac{\omega\sigma\mu}{2\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Onde che entrano in un materiale



$$\lambda = c \quad (\mu=1)$$

$$\Rightarrow \text{viene quasi completamente assorbito}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = 9,03$$

$$f = 10^{10}$$

Una parte dell'onda viene anche riflessa, la quantità di energia riflessa dipende dal materiale

In un buon conduttore l'onda → quando viene riflessa ← anche H sfasa di 180°

DENSITÀ ONDE E.M

- Un'onda trasporta energia elettrica e magnetica

$$w^{em} = w^e + w^m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

- Quantità di moto (per unità di vol.)

$$\underline{g}^{em} = (\underline{D} \times \underline{B}) = \epsilon \mu (\underline{E} \times \underline{H}) =$$

- Il vettore di Poynting $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

$$\underline{g}^{em} = \frac{\underline{S}}{v}$$

- Per un'onda piana con direzione \underline{u} , $\underline{E} \perp \underline{H} \perp \underline{u}$

$$\underline{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{u} \times \underline{E}$$

→ \underline{E} ed \underline{H} non hanno componenti lungo la direzione di propagazione dell'onda.

$$|\underline{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\underline{E}|$$

- Riscrivo la densità di energia:

$$w^{em} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\epsilon}{\mu} E^2 \right) = \epsilon E^2$$

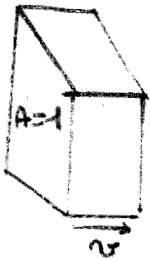
⇒ NEL CASO DI UN'ONDA PIANA NOTO CHE $w^e = w^m$

- Qd m

$$\underline{g}^{em} = \frac{\underline{E} \times \underline{H}}{v} = \frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{E} \times (\hat{u} \wedge \underline{E}) = \frac{1}{v} \epsilon E^2 \hat{u} = \frac{w^{em}}{v} \hat{u}$$

$$\underline{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \hat{u} = \epsilon E^2 v \hat{u}$$

$$\underline{G}^{em} = \frac{W^{em}}{v} \hat{u} \Rightarrow \text{HO INTEGRATO SUL VOLUME}$$



In un secondo spazio un volume

$$V = (v \cdot t) \cdot A = v$$

$$w^{em} v = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})$$

- Mediò la quantità in un periodo, ottenendo intensità nel campo elettromagnetico

$$I = \bar{w}^{em} v = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}) dt$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t} + 2}{4}$$

$$\int_0^T e^{\pm 2i\omega t} dt = 0 \quad \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{T}{2}$$

$$I = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{2} \text{ W/m}^2 \rightarrow E \text{ proporzionale ad } E_0^2$$

$$\uparrow \text{ 377 } \Omega \text{ NEL VUOTO} = \text{IMPIEDENZA DEL VUOTO} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

$$\text{Osservo che } I = \bar{S}$$

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu} (\bar{E} \times \bar{H}) = \frac{1}{\mu} |\bar{E} \times \bar{u} \times \bar{E}| = \frac{1}{\mu} \bar{E}^2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{2}$$

- Energia assorbita nel tempo t da una sup A

$$W^{em} = w^{em} A \cdot t = w^{em} A \cdot (\omega t)$$

$$G^{em} = \frac{W^{em}}{t} = w^{em} A t \rightarrow \text{Qdm ceduto alla sup } A \text{ nel tempo } t$$

$$\text{teorema dell'impulso} \quad \int F dt = G^{em} \quad F = \frac{d}{dt} G^{em}$$

$$F^{em} = w^{em} A$$

- La pressione elettromagnetica è pari alla densità di energia trasportata

$$P = \frac{F^{em}}{A} = w^{em} \quad \xrightarrow{G^{em}}$$

- Per una superficie riflettente la pressione si raddoppia

$$P = 2w^{em} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{G^{em}} \\ \xleftarrow{G^{em}} \end{array}$$

- Per una superficie assorbente

$$P = \frac{2}{3} w^{em} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{G^{em}} \\ \xrightarrow{G^{em}} \end{array}$$

CONDIZIONI AL CONTO RNO PER COMPI USRIBIU

Rischio Maxwell, per ricavare le condizioni al contorno

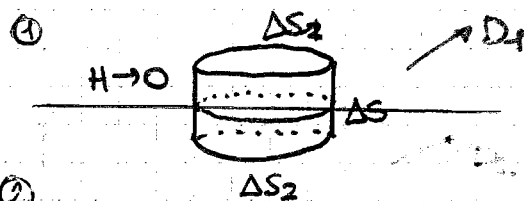
$$\text{div } \underline{D} = \rho$$

$$\text{div } \underline{B} = 0$$

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

Considero ~~2~~ mezzi e una sup di separazione



$\sigma, j_s \rightarrow$ può esserci una j_s se la conduttività ha conduttività infinita

$$f = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu}} \rightarrow 0$$

$$\int_V \text{div } \underline{D} \, dv = \int_V \rho \, dv = \oint_S \underline{D} \cdot \underline{n} \, da = \sigma \Delta S$$

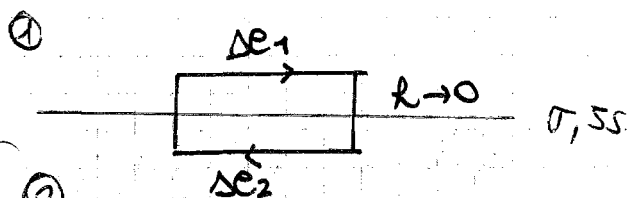
Le superfici laterali $\rightarrow 0$, $n_1 = -n_2 = n$

$$\oint_{\Delta S} \underline{D}_1 \cdot \underline{n} \, da - \oint_{\Delta S} \underline{D}_2 \cdot \underline{n} \, da = \sigma \Delta S$$

Immagino \underline{D}_1 e \underline{D}_2 costanti sulla piccola sup ΔS

$$D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \sigma \Delta S$$

$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \Rightarrow$ la componente normale ha discontinuità se $\exists j_s$



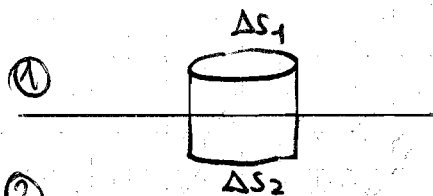
$$\oint_S \text{rot } \underline{E} \cdot \underline{n} \, dA = - \oint_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot \underline{n} \, da$$

$$= - \frac{d}{dt} \oint_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot \underline{n} \, da \xrightarrow{\text{se } \Delta S \rightarrow 0} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot \underline{n} \, da \rightarrow 0$$

$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{e} = 0 \rightarrow$ Trascuro l'R e suppongo \underline{E} costante su ΔS_1 e ΔS_2

$$E_{1T} \Delta S_1 - E_{2T} \Delta S_2 = 0$$

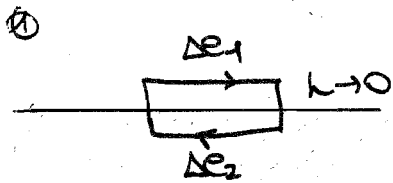
$E_{1T} = E_{2T} \rightarrow$ la componente tang non subisce variaz



$$0 = \int_{\Delta S} \text{div } \underline{B} \, dv = \oint_S \underline{B} \cdot \underline{n} \, da$$

$$0 = B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$



$$\oint \text{rot } \underline{H} \cdot d\underline{a} = \iint \underline{J}_s \cdot d\underline{a} + \frac{d}{dt} \iint \underline{D} \cdot d\underline{a}$$

②

$$\oint_C \underline{H} \cdot d\underline{e} = J_s \Delta e$$

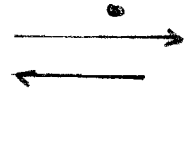
$$H_{1T} \Delta e - H_{2T} \Delta e = J_s \Delta e$$

$$H_{1T} - H_{2T} = J_s$$

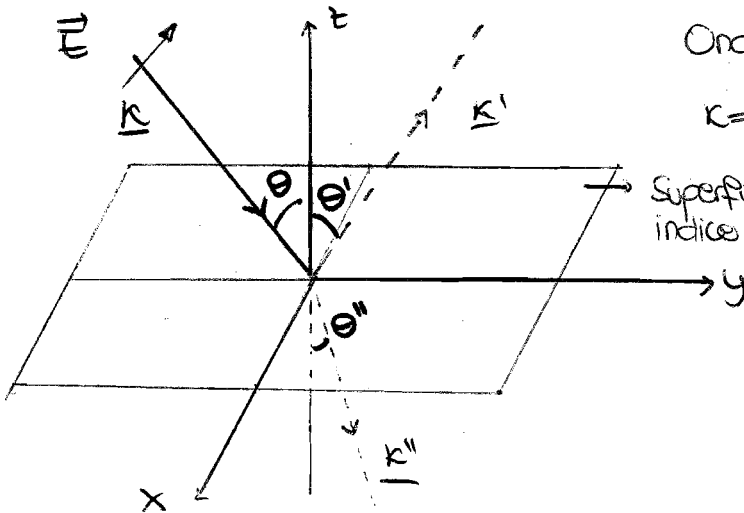
- Nel primo materiale (vuoto o dielettrico), (il secondo ha conducibilità ∞)

$$\begin{aligned} D_{n1} &= \sigma \\ E_{T1} &= 0 \\ B_{n1} &= 0 \\ H_{T1} &= J_s \end{aligned}$$

⇒ sono la somma dei campi incidente e riflesso



RIFLESSIONE E RIFRAZIONE delle onde e.m.



Onda piana di direzione \underline{k}

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

$$k = \frac{\omega}{v_2}$$

Superficie di separazione fra 2 piani con indice di rifrazione n_1 ed n_2

di sono i coseni di direzione dell'onda incidente (\underline{k})

$$\underline{E} = E_0 e^{i[\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}]}$$

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = k [(x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{k}) \cdot (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{k})]$$

$$x = 0$$

$$x_y = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$$

$$x_z = \cos \theta$$

$$\underline{E} = E_0 e^{i[\omega t - k(y \sin \theta + z \cos \theta)]}$$

$$E_x = E_{0x} e^{i[\omega t - k(y \sin \theta + z \cos \theta)]}$$

$$E_y = E_{0y} e^{i[\omega t - k(y \sin \theta + z \cos \theta)]}$$

$x=0$ È IL PIANO INCIDENTE DELL'ONDA

$$\rightarrow x_x = 0$$

LUNGO y $x_y = \sin \theta$

LUNGO z $x_z = \cos \theta$

- Onda riflessa

$$E_x' = E_{0x}' e^{i[\omega' t - k'(x' x + y' y + z' z)]}$$

$$E_y' = E_{0y}' e^{i[\omega' t - k'(x' x + y' y + z' z)]}$$

• Onde riflesse

$$E_x'' = E_{0x}'' e^{i[\omega''t - k''(x''x + x''yy + x''zz)]}$$

$$E_y'' = E_{0y}'' e^{i[\omega''t - k''(x''x + x''yy + x''zz)]}$$

• Voglio applicare le condizioni al contorno sul piano $z=0$

$$\cos\theta = 0$$

$$\sin\theta = 1$$

• Applico le condizioni al contorno

$$E_y + E_y' = E_y''$$

$$E_x + E_x' = E_x'' \quad | \quad z=0$$

• Le condizioni al contorno sono per mezzi trasparenti ($\neq 0, \neq \infty$)

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$E_{1T} = E_{2T}$$

$$H_{1T} = H_{2T}$$

• (Sto studiando le componenti tangenti, le x e la y)

Valuto in $z=0$

$$E_{0x} e^{i[\omega t - k_y y \sin\theta]} + E_{0x}' e^{i[\omega' t - k'(x'x + y'y)]} = E_{0y} e^{i[\omega'' t - k''(x''x + y''y)]}$$

• Qst rel va soddisfatta $\forall x, y, t \Rightarrow$ i coef devono essere uguali!

$$\omega = \omega' = \omega''$$

Un'onda monocromatica di una certa freq conserva la stessa freq

$$x = x' = x'' = 0$$

Anche l'onda riflessa e quella rifratta giacciono nel piano d'incidenza dell'onda

$$k \sin\theta = k' \sin\theta'$$

$$\text{lo so che } k = \frac{\omega}{v_1}, \text{ ma anche } k' = \frac{\omega}{v_2}$$

$$\Rightarrow k = k' \quad \text{e} \quad \sin\theta' = \sin\theta \rightarrow \theta = \theta' \quad \text{LEGGE DI CARTESI}$$

$$k \sin\theta = k'' \sin\theta''$$

$$\text{lo so che } k = \frac{\omega}{v_2} \quad \text{quindi,}$$

$$\frac{\omega}{v_1} \sin\theta = \frac{\omega}{v_2} \sin\theta''$$

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

$$\text{Quindi } n_1 \sin\theta = \sin\theta'' \cdot n_2$$

LEGGE DI SNELL

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$$

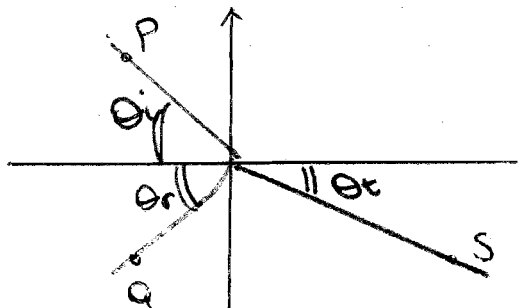
• Servono anche condizioni fra le diverse ampiezze: esse devono rispettare la conservazione dell'energia.

Lo facciamo per 2 casi:

2. CAMPO ELETTRICO LINEARMENTE POLARIZZATO ~~IL~~ A PIANO D'INCIDENTA
(E' VARIO SINUSOIDALMENTE MA LA DIREZIONE DI ALLUNGARE E', L'ONDA
RIMANE SU UN PIANO) \vec{P}

b. CAMPO ELETTRICO LINEARMENTE POLARIZZATO \perp PIANO INCIDENTE \vec{P}

Equazioni di Fresnel



P è il raggio incidente che colpisce l'interfaccia.

Le considerazioni fatte per \vec{E} valgono anche per i raggi eliminati

OTICA GEOMETRICA

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$$

Una parte della potenza incidente è riflessa dall'interfaccia

→ REFLETTANZA R (FRAZIONE DI ONDA RIFLESSA)

La parte rifratta si chiama TRASMISSIONE T

Il valore di R e T dipende dalla polarizzazione dei raggi.

- ONDA \perp

$$R_s = \left[\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 = \left[\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right]^2$$

$$= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2}}$$

$$\Rightarrow R_p = \left[\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right]^2$$

Per la conservazione dell'energia $T = 1 - R$

Se la luce non è polarizzata, il coef di riflessione è:

$$R = \frac{R_s + R_p}{2}$$

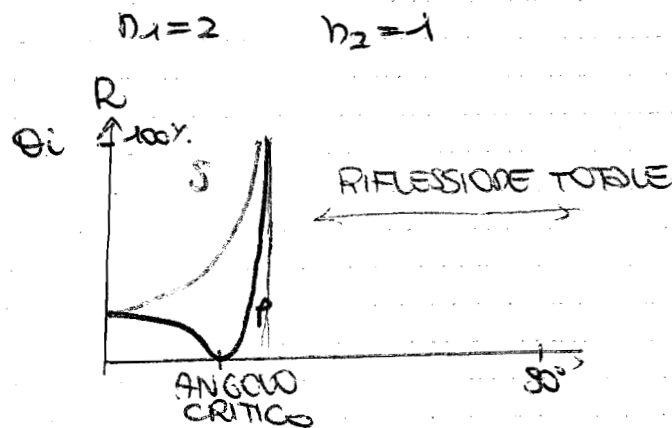
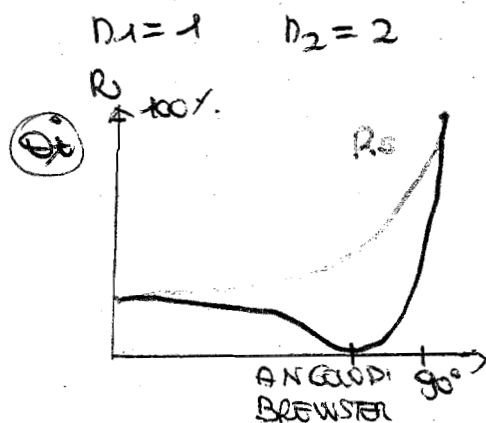
→ La direz cambia istante per istante, in maniera casuale

ANGOLO DI BREWSTER : Per onde polarizzate \parallel , c'è un angolo particolare in cui si ha solo riflessione.

Se ho aria e vetro $\alpha = 56^\circ$

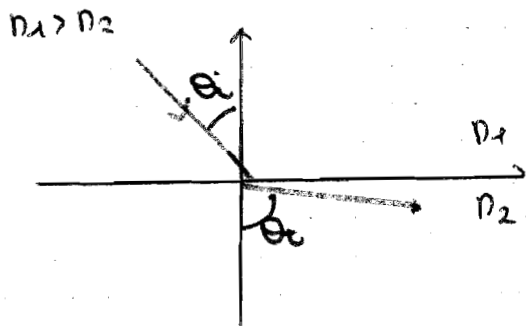
Qst angolo si ha solo se i mezzi sono trasparenti.

- ANGOLO CRITICO se $n_1 > n_2$ si ha un angolo con RIFLESSIONE TOTALE.
per qst angolo l'onda viene interamente riflessa.
Il primo mezzo si dice OTTI CONVERTE PIU' DENSO
(VETRO, ARIA $\angle = 41,2^\circ$)



- Incidenza normale $\theta_i \approx \theta_t \approx 0$

$$R = R_s = R_p = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$



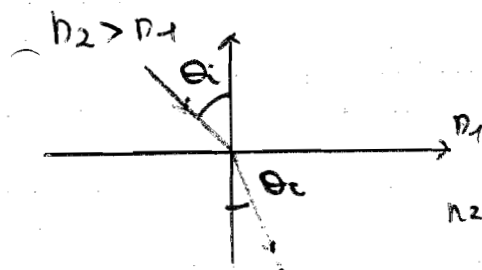
se $n_1 > n_2$

$\theta_t > \theta_i$, esiste un valore limite t.c. $\theta_c = \frac{\pi}{2}$

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

↓
ANGOLO CRITICO

→ HO SOLO RIFLESSIONE



$$\theta_c > \theta_t$$

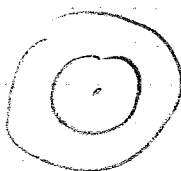
ONDE e.m nel VISIBILE : OTICO

- L'occhio è in grado di rilevare e ad ogni λ si associa un colore.
- Qui non esiste una radiazione elettromagnetica monocromatica: ci sono ∞ di frequenze con una dominante.
- OTICA FISICA ONDULATORIA = interpreta i fenomeni come conseguenza delle onde e.m
- Prima vera l'ottica corpuscolare (Newton)
- A causa di fenomeni quali interferenza, riflessione, rifrazione e diffrazione si ebbero diversi orientamenti
- GRIMALDI (17 secolo) nel "De Lumine" descrive la sua scoperta della diffrazione
 - ↓
 - Quando l'onda incontra un ostacolo si discosta dalla sua propagazione rettilinea, ma l'ostacolo diventa un fronte d'onda
(La diffrazione dipende dalla λ trasportata, il fenomeno è int. maggiore qnt più maggiore è il rapporto fra $\frac{\lambda}{D}$ OSTACOLO)
 - ⇒ Se $\lambda \rightarrow 0$ non ci sarebbe diffrazione (non esistono ostacoli più piccoli)
 - ⇒ su qst hp si basa l'ottica geometrica.
- HUYGENS (17 secolo) teorizza la natura ondulatoria della luce
 - tratta superiore a qll dell'ottica geometrica
- NEWTON mostra che la luce bianca è fatta di tutti i colori. La luce è composta da particelle
- FRESNEL studi sui fenomeni ottici.
Poisson ⇒ nell'ombra di un disco circolare illuminato da una sorg. puntiforme al centro?
- YOUNG stabilisce sperimentalmente che la luce si comporta come un'onda
il colore è legato a λ
Scuola con Newton
- POINCARÉ Si scontra con Newton, è per l'ottica ondulatoria, studi su diffrazione e interferenza.
Scopre gli anelli di Newton.

ONDE SFERICHE

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\Delta r = v \Delta t$$



sup di equifase
⇒ SFERICHE

• Scriviamo l'eq di un'onda sferica

$$\nabla^2 \varphi(r, \phi, \theta) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

• Se il mezzo è omogeneo non ha dipendenza da ϕ e θ

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left[-\frac{1}{r^2} \chi(r, t) + r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right] \right] = \frac{1}{v^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \left[-\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right] = \frac{1}{v^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

• Soluz: eq di D'Alembert

$$\chi(r, t) = \underbrace{f_1(r - vt)}_{\text{ONDA EMERGENTE}} + \underbrace{f_2(r + vt)}_{\text{ONDA CONVERGENTE}}$$

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r - vt) + \frac{1}{r} f_2(r + vt)$$

• Onda monocromatica

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k \cdot r) + \frac{A}{r} \cos(\omega t + k \cdot r)$$

• Rapp. complessa

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i[\omega t - k \cdot r]} + \frac{A}{r} e^{i[\omega t + k \cdot r]}$$

• Energia sulla sp (flusso)

$$\oint \underline{S} \cdot \underline{n} \, d\omega = \oint (\underline{E} \times \underline{H}) \cdot \underline{n} \, d\omega$$

\underline{E} ed \underline{H} sono \perp e cost sullo sup (il valore medio)

Prendo il valore medio sullo sup di $\underline{E} \times \underline{H}$

$$\oint = \frac{A^2}{r^2} \cdot \oint d\omega = \frac{A^2}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi A^2$$

↓

IL FLUSSO DI ENERGIA SI MANTIENE
COSTANTE SU OGNI SUP (NON DIPENDE
DA r)

IRADIAZIONE ELETTROMAGNETICA DA UN CARICO IN MOVIMENTO

Dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Esprimiamo il campo magnetico: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
 ↳ POTENZIALE VETTORIALE MAGNETICO

Da cui

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Introduco un potenziale scalare

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \psi$$

Resta ancora un'indeterminata nella scelta di ψ e \vec{A} , lo imponiamo per comodità, tra essi non hanno reale significato fisico

$$\text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

Ciò ci consente di ottenere 4 equazioni separate (\vec{B} & \vec{E})

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 A_i - \epsilon \mu \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = -\mu_0 J_i \\ \nabla^2 \psi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \quad c=x,y,z$$

Le soluz dell'equaz di Poisson modificate sono

$$A_i(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dv' \frac{J_i(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \psi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dv \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t)|}{c}$$

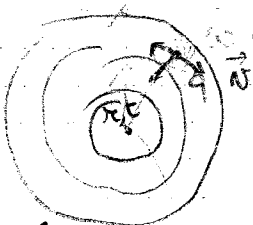
(+)

Sono POTENZIALI RITARDATI



Se il sistema è statico $t' = t$.

Esempio: cariche puntiformi (potenziale di Liouard-Viechert)



$$dq = \rho dv = \rho \cdot S(w) dw = \rho \cdot S(w) c d\tau$$

\vec{E} ha componente radiale su \vec{r} per spostare l'e da un guscio sferico all'altro

$v \cos \theta \rightarrow$ diminuisce il volume effettivo

$$dq = \rho S(w) [c - v \cos \theta] d\tau$$

STERA CON CENTRO P CHE SI CONTRAEE CON LO SPORTE IN P ALTERNAT

Se la carica si allontanasse ci andrebbe un segno + \rightarrow di aumento

$$\rho S(\omega) = \frac{q c}{c - v_{\text{osc}}}$$

C-10000 \rightarrow CORREZIONE DOVUTA AL MOVIMENTO
RADIALE DELLA PARTICELLA

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}' - \frac{v_{\text{osc}}}{c}(\vec{r} - \vec{r}')|} \Big|_{t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}}$$

$$\vec{J} = q \vec{v}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot v_i}{|\vec{r} - \vec{r}' - \frac{v_{\text{osc}}}{c}(\vec{r} - \vec{r}')|} \Big|_{t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}}$$

• Approssimazione statica & non relativistica

$$\textcircled{a} \vec{r}'(t) = \vec{r}'(t)$$

Sono vicini alla sorgente

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t)|}{c}$$

$$\textcircled{b} |\vec{r}| \ll c$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \text{non dipendono da } t$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

• Approssimazione & non relativistica

$$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'(t)| \quad \forall t$$

$$|\vec{v}| \ll c$$

$$\text{Dunque } |\vec{r} - \vec{r}'(t)| \approx |\vec{r}|$$

$$t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

COMPENSA IL RITARDO, MA NON HO UNO
DI ESPRIMITO, NON IMPUGNA!

Quindi ottengo

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}| \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}| \left(1 - \frac{v(t-r/c)}{c} \cdot \hat{e}_r\right)}$$

(a) dipendenza temporale
& nascosta nel vettore \vec{r}

Siccome $|v| \ll c$ posso espandere...

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|} \left(1 + \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}}{c} \right)$$

Per il potenziale vettoriale.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}(t - r/c)}{r} + \text{TERMINI 2 ORDINE TRASCURGIBILI}$$

\vec{v} ha una dip. esplicita da r e da t
spaziale
temporale

Ricaviamo l'espressione del campo elettrico $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$

$$\vec{E}_H = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{v}(t - r/c)}_{\vec{a}(t - r/c)}$$

$$\vec{E}_E = -\nabla \varphi$$

non c'è

Gradiente in coord. sferiche $\vec{\nabla}_r = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$

$$\vec{E}_E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{a}(t - r/c) \left(-\frac{1}{c} \right) + \dots \left(\frac{1}{r^2} \text{ trascurato} \right)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) = v\left(t - \frac{r}{c}\right) (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta)$$

Il campo totale risulta

$$\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}_E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \sin \theta}{r} a(t - r/c) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$B_r = 0 \quad \frac{\partial}{\partial r} A_\phi = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \phi} A_r = 0$$

$$B_\theta = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \phi} A_\theta = 0$$

perché $A \neq A(\phi)$ e $A_\phi = 0$

$$\vec{B}_\phi = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right] \hat{e}_\phi$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} q \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(v(t - r/c) \sin \theta \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v(t - r/c) \cos \theta}{r} \right) \right] \hat{e}_\phi$$

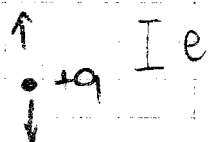
$\rightarrow \theta \left(\frac{1}{r} \right)$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \sin \theta}{r} a(t - r/c) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{J} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\mu_0}{c(4\pi)^2} \left(\frac{q \sin \theta}{r} \right)^2 a^2(t - r/c) \hat{e}_r$$

\rightarrow IL FLUSSO È SEMPRE DIRETTO RADIALMENTE VERSO L'EST

Oscillatore armonico



$$r' = l \sin(\omega t')$$

$$v' = \omega l \cos(\omega t')$$

$$a' = -\omega^2 l \sin(\omega t')$$

$$= -\omega^2 l \sin(\omega(t - \frac{r_0}{c}))$$

$$= -\omega^2 l \sin(\omega t - \kappa r_0)$$

QST APPROX VALERE $\lambda \gg r'$

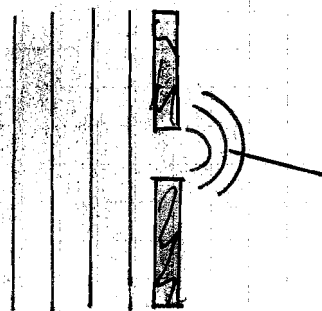
OTTICA GEOMETRICA

- Si basa su
 - PROPAGAZIONE RETTILINEA
 - RIFLESSIONE
 - RIFRAZIONE

L'idea di raggio si ha dall'exp: si vedono fasci di luce più o meno collimati

La propagazione in linea retta spiega riflessione e rifrazione

Diffrazione



Onda elastica in acqua: quando si incontra un ostacolo l'onda non propaga più in linea retta

FRANGE DI DIFFRAZIONE

DIFFRAZIONE
DELLA LUCE ATTRAVERSO
LE NUVOLE

→ qnd un'onda incontra un ostacolo tende a curvarsi e a diffondersi

DEDUZIONI DELLE LEGGI DELL'OTTICA GEOM. DALL'EQ DI MAXWELL

1. PROPAGAZIONE RETTILINEA della luce in un mezzo omogeneo (disomogeneo Fermat)
2. RIFLESSIONE
3. RIFRAZIONE

• RAGGIO LUMINOSO: indicazione di propagazione dell'energia del fascio di radiaz.
⇒ nei mezzi isotropi

• Cade in difetto qnd ci sono evidenti fenomeni di DIFFRAZIONE

• La soluzione è esatta quando $\lambda \rightarrow 0$ $D \rightarrow \infty$

• Equazione delle onde

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

• Mezzo lineare, isotropo non omogeneo $\Rightarrow \epsilon_r = \epsilon_r(\vec{r})$
 $n = n(\vec{r})$

• Cerco una sol. del tipo $\varphi(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{-i\omega t}$

ONDA MONOCROMATICA

• f è dunque sol. di:

$$\nabla^2 f + \frac{\omega^2}{v^2} f = 0$$

Indice di rifraz. $n = \frac{c}{v}$

Vettore di propagazione nel vuoto $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$

Quindi otterremo $\nabla^2 f + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 f = \nabla^2 f + k_0^2 n^2 f = 0$

Nel mezzo disomogeneo cerchiamo una f del tipo

$$f(x, y, z) = \underbrace{Ae^{ik_0 L}}_{\text{cost}} \underbrace{L(x, y, z)}_{\text{funzione del piano}}$$

Dobbiamo sostituire f nella forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A i k_0 \cdot \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z) \cdot e^{i k_0 L(x, y, z)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A i k_0 \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} e^{i k_0 L} + - A k_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 e^{i k_0 L} \quad (+ k_0^2 n^2 A e^{i k_0 L} = 0)$$

Somma tutte le componenti

$$i A k_0 \nabla^2 L e^{i k_0 L} - A k_0^2 \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 \right] + k_0^2 n^2 A e^{i k_0 L} = 0$$

Semplificando

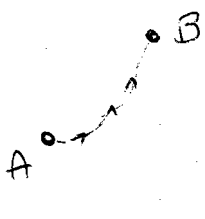
$$i k_0 \nabla^2 L - k_0^2 |\text{grad } L|^2 + k_0^2 n^2 = 0$$

$$i \frac{\nabla^2 L}{k_0} - |\text{grad } L|^2 + n^2 = 0$$

Facciamo il lim $k_0 \rightarrow \infty \quad \lambda_0 \rightarrow 0$

E otterremo $|\text{grad } L|^2 = n^2$

$$|\text{grad } L| = n(x, y, z) \quad \text{Equazione di eikonal}$$



Facciamo l'integrale lungo il cammino S

$$\int_A^B ds$$

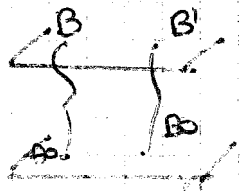
Scegliamo il cammino più breve δ .

Spesso A nel piano. $\exists A_0$ e un cammino minimo b.c. l'integrale tra i due piani assume un valore minimo.

$$L(x, y, z) = \min_{A_0} \int_{A_0}^B n ds$$

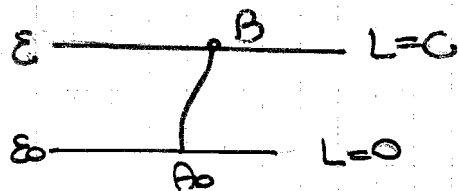
Se B appartiene alla sop di livello di $A_0 \quad L=0$

Se B "giace" su una sop di livello $L = \text{cost}$



Corrisp biunivoca: lungo qst cammini gli integrali sono costanti

⇒ CORRISP BIUNIVOCA TRA PUNTI DEI 2 PIANI

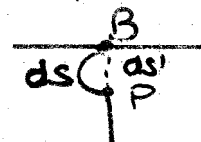


$$\min \int_{A_0}^B n ds = L$$

⇒ γ_0 è sempre \perp alle superfici di livello che incontra nel suo cammino

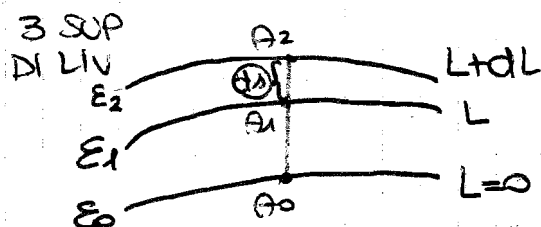
• Supponiamo per assurdo che γ_0 non entri \perp alle sup di livello E

$$\min \int_{A_0}^B n ds = \int_{A_0}^P n ds + n ds'$$



$$\int_{A_0}^B n ds = \int_{A_0}^P n ds + n ds'$$

Ma $ds > ds' \Rightarrow \text{impossibile}$



$$\begin{aligned} \int_{A_0}^{A_2} n ds &= L + dL \\ &= \int_{A_0}^{A_1} n ds + n ds = L + dL \end{aligned}$$

$dL = \text{grad } L \cdot d\vec{s}$ $n ds = n dL$

$n ds = |\text{grad } L| \cdot ds$ (sono //)

$n = |\text{grad } L|$

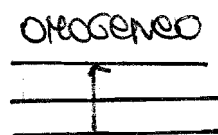
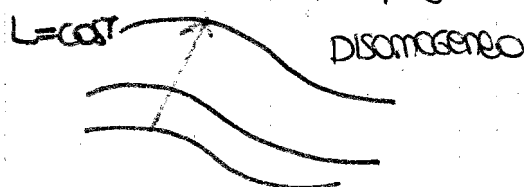
• Quindi

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{-i\omega t} e^{i\phi_0 \left[\min \int_{A_0}^{P(x,y,z)} n ds \right]}$$

• Nel mezzo omogeneo ho fronti piani di equifase $x = \text{cost}$

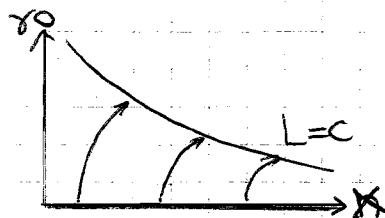
$$\psi(x, y, z, t) = A e^{-i\omega t} e^{i k_0 x}$$

nel mezzo disomogeneo non ho x , ma L
 ⇒ l'onda propagando si deforma



DIREZIONE lungo la quale PROPAGA E E DETERMINATA
 (CORREZIONE del vettore S)

• MEZZO DISOMOGENEO in cui $n=n(x)$



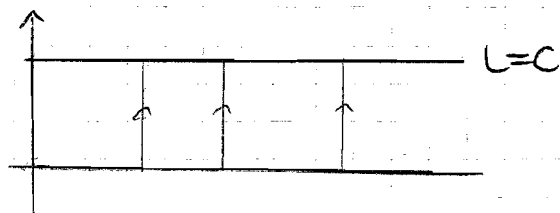
FRONTI DI
EQUIFASE

$$\Delta e = v \Delta t = \frac{c}{n} \Delta t$$

n

↳ n aumenta al crescere di x

• MEZZO OMOGENEO



In un mezzo disomogeneo i piani di equifase non sono ^{+ piani +} ~~separati~~ equifase alla direz di propagaz dell'onda. Cioè, rimangono I al raggio luminoso

↓
Se il mezzo è isotropo ha la stss direzione di \underline{s}

EQUAZIONE DEL RAGGIO

• Consideriamo la curva percorso da un raggio luminoso con versore tangente \underline{s}
↳ variazione lungo la direz di \underline{n} ?

• Sia ds un elemento della curva $d\underline{s} = ds \cdot \underline{s}$

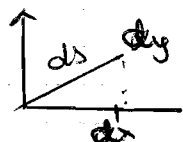
• La variaz di L : $dL = \underline{\nabla} L \cdot d\underline{s}$

• Abbiamo dimostrato $dL = n ds$

Da cui $\underline{\nabla} L = n \underline{s}$
↳ $n(x) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$

• Per uno spostamento ds

$$\frac{d(n(x))}{ds} = \frac{\partial n(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial n(x)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial n(x)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$$



Quindi $\frac{dx}{ds} = x_x$ $\frac{dy}{ds} = x_y$ $\frac{dz}{ds} = x_z$

• Pertanto

$$\frac{\partial(n(x))}{\partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial(n(x))}{\partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial(n(x))}{\partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}$$

• Sostituendo

$$\frac{d(n(x))}{ds} = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \frac{dz}{ds} \right]$$

$$= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)^2 \right]$$

• Ricordando che $|grad L|^2 = n^2$ si ottiene

$$\frac{d(n\delta)}{ds} = \frac{1}{2n} \nabla n^2$$

• Semplificando

$$\frac{d(n\delta)}{ds} = \nabla n$$

• Se il mezzo è omogeneo $n = \text{cost}$

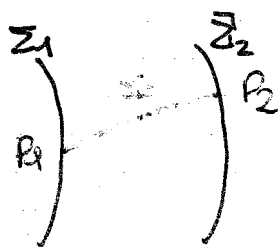
$$n \cdot \frac{d\delta}{ds} = \nabla n \rightarrow \frac{d\delta}{ds} = 0$$

$$\delta = \text{cost}$$

↓
il raggio propaga in linea retta
le δ sono \perp al raggio.

CAMMINO OTTICO

Consideriamo la superficie d'onda Σ_1 al tempo t_1 e Σ_2 al tempo $t_2 = t_1 + \Delta t$ e un raggio luminoso ro da P_1 a P_2



Definiamo
compiuto

$$\Delta l_o = \int_{P_1}^{P_2} n ds$$

LUNGHEZZA DEL CAMMINO OTTICO
del raggio luminoso

INTEGRALE DI UNO
VOLUME LUNGO ro

SPAZIO
INFINITESIMO
LUNGO ro

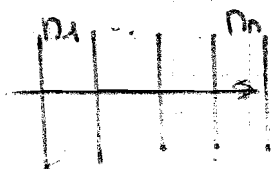
ro È IL VALORE CHE
MINIMIZZA L'INTEGRALE

• Perché $n = \frac{c}{v}$ e $v = \frac{ds}{dt}$ riscriviamo:

$$\Delta l_o = \int_{P_1}^{P_2} \frac{c}{v} ds = \int_{P_1}^{P_2} c dt = c \Delta t$$

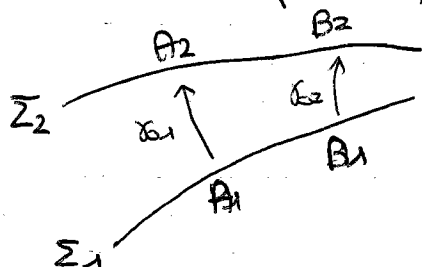
↳ IL CAMMINO OTTICO È IL CAMMINO CHE
LA LUCE PERCORREBBE NEL VUOTO
NELLO STESSO Δt

⑤ Mezzo disomogeneo fatto da strati omogenei



$$l_o = \sum n_i \cdot l_i = \sum \frac{c}{v_i} \cdot l_i = c \cdot \sum \frac{l_i}{v_i} = c \cdot \sum \Delta t_i = c \Delta t$$

• Date due sup di equifase in un mezzo diomogeneo



• Varia il cammino geometrico, ma non il cammino ottico

• Il tempo t_{01} è minore $\times A$ nello stesso tempo percorre + spazio.

• Qualunque punto scelgo, il cammino ottico è identico fra punti corrispondenti su 2 fronti d'onda.

• Il tempo impiegato dal raggio luminoso per percorrere il cammino tra 2 punti corrisp posti su 2 sup di equifase è sempre lo stesso

OSS: Se il mezzo è omogeneo, il cammino ottico è uguale a qll geometrico per l'indice di rifrazione.

PRINCIPIO DI FERMAT

• Il cammino che un raggio luminoso percorre per congiungere 2 punti è quello per il quale la luce impiega il tempo minimo rispetto a cammini la cui differenza è minima

corrett

Non è definito completamente, Corret:

Il cammino deve essere un estremo (min, max, sella)

RIFRAZ

• Il cammino percorso dal raggio fra 2 punti seguendo la legge dell'ottica geometrica è tale che

IL TEMPO
IMPIEGATO è
Stazionario

IL CAMMINO
OTTICO è
Stazionario

• Ogni deviaz del cammino del primo d'una piccola quantità δ risp r_0 , ha una variazione nel cammino ottico almeno del secondo ordine in δ

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds - \int_{P_1, r_0}^{P_2} n ds \sim \delta^2$$

$$\delta \int n ds = 0$$

• Il cammino ottico tra 2 punti, misurato prima lungo r_0 e poi lungo r , differisce di una quantità infinitesima di ordine superiore risp a quella che δ differisce da r_0

$$\left(\frac{dC(\delta)}{d\delta} \right) = 0$$

Dimostrazione

Dimostro che AOB è il cammino minimo, considero

$$AE = A'E$$

$$A'E + EB > A'B$$

$$AE + EB > AO + OB = AB$$

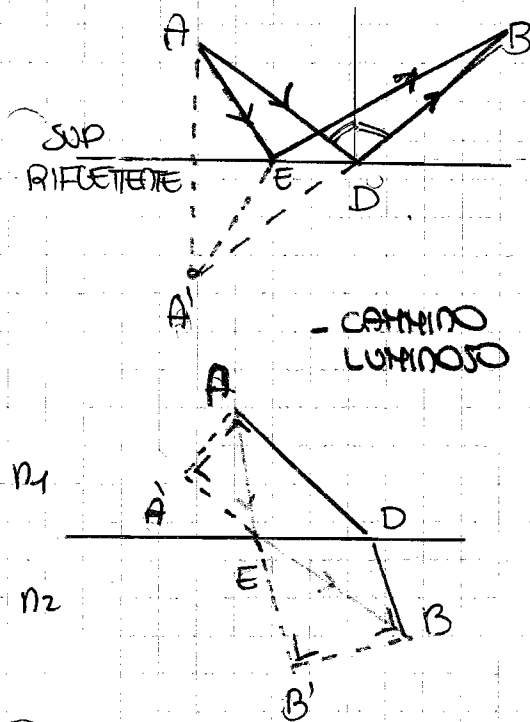
$$n_1 (AE + EB) > n_1 (AO + OB) \quad \forall E \text{ il cammino è maggiore di quello ottico}$$

$$n_1 AO + n_2 OB = n_1 A'E + n_2 EB' \quad (2 \text{ piani di equidistanza})$$

$$n_1 AO + n_2 OB \leq n_1 AE + n_2 EB$$

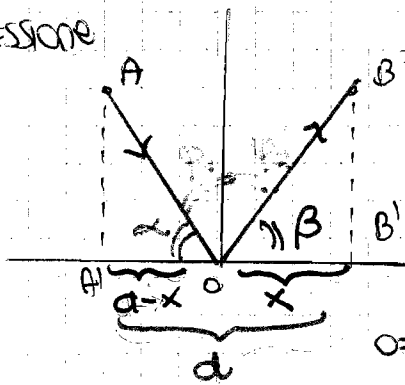
Anche qui il cammino ottico è il minimo

P. 66



→ Sia per il raggio riflesso che per il raggio rifratto il cammino ottico è il minimo

RIFLESSIONE



L'effettivo cammino ottico è

$$n_1 (AO + OB) = n_1 (h_1^2 + (d-x)^2)^{1/2} + (h_2^2 + x^2)^{1/2}$$

Devo derivare e imporre che il cammino sia un estremo

$$0 = \frac{dL}{dx} = \left[-\frac{(d-x)}{\sqrt{h_1^2 + (d-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} \right] n_1$$

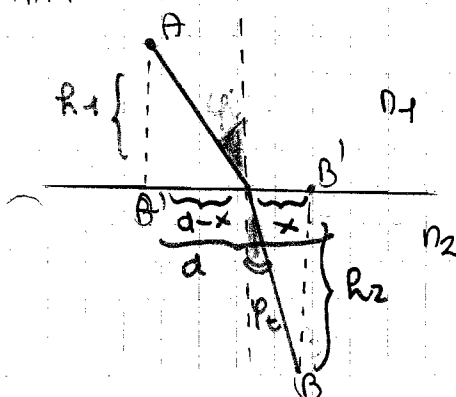
$$n_1 [-\cos \alpha + \cos \beta] = 0$$

$$n_1 [-\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2] = 0$$

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 \quad \text{con } \varphi_i \in (0, \pi)$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

RIFRAZIONE



$$L = n_1 AO + n_2 OB$$

$$= n_1 (\sqrt{h_1^2 + (d-x)^2}) + n_2 (h_2^2 + x^2)^{1/2}$$

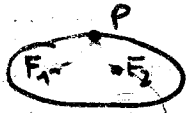
$$\frac{dL}{dx} = -\frac{n_1 (d-x)}{\sqrt{h_1^2 + (d-x)^2}} + \frac{n_2 x}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} = 0$$

$$\equiv -n_1 \sin \varphi_i + n_2 \sin \varphi_r \quad n_1 \sin \varphi_i = n_2 \sin \varphi_r$$

• Quindi il principio di Fermat implica la legge di Snell e della riflessione

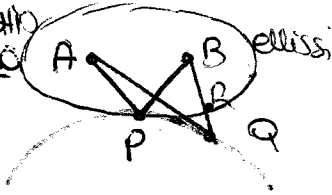
• Ma non sempre il cammino ottico è un minimo, può essere anche un max

ellisse



$$F_1P + F_2P = \text{cost} \quad \forall P$$

2. Specchio
convesso



$$AP + BP = AR + BR$$

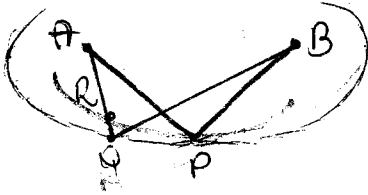
Osservo

$$AR < AQ \\ RB < QB$$

Costruisco l'ellisse
con fuochi A e B
passante per P

$$AP + PB < AQ + QB \rightarrow \text{CAMMINO MIN}$$

b. SPECCHIO CONCAVO



Prendo ellisse passante per P con A e B come fuochi

$$AP + PB = AR + RB$$

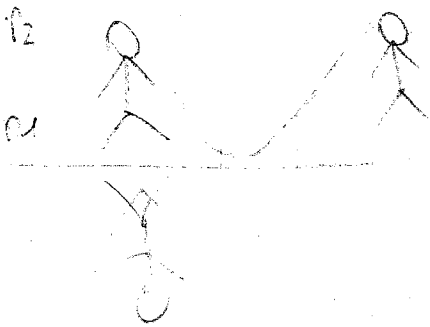
$$AR < AQ$$

$$RB < QB$$

$$AP + PB = AR + RB < AQ + QB$$

\rightarrow CAMMINO MAX

PROBLEMA



Esempio: il campo di calcio
autodrenante dell'acqua

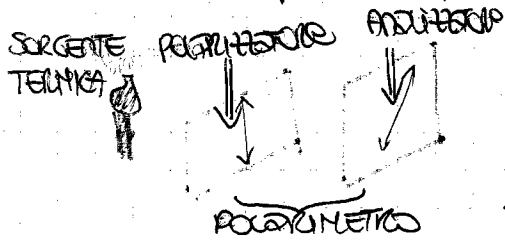
\rightarrow segue la legge di Snell

POLARIZZAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

• All'inizio della storia non si era a conoscenza delle equazioni di Maxwell.

• Problema: descrivo la radiazione luminosa con un vettore o uno scalare?

- La corda vibrante con un \vec{v} , il suono con uno scalare, ma la luce??
- ⇒ Se la perturbazione è uno scalare \vec{E} è un vettore // alla diret. di propagazione, cioè a sono piani privilegiati, se è un vettore non //, formo con la diret. di propagazione un piano speciale.



Se facciamo una lamina polarizzatrice e la ruotiamo per il nostro occhio e la sorgente luminosa non vediamo nulla, ma se ne aggiungiamo una 2^a e la facciamo ruotare vediamo che varia periodicamente l'intensità luminosa.

⇒ attraversando una lamina la radiazione ha acquistato una nuova propr.

Le 2 lamine hanno 2 diversi assi di trasmissione



Legge che descrive la variazione d'intensità luminosa

LEGGE DI MALUS

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

La trasmissione ottica è un vettore la cui diret. non coincide con la diret. di propagazione.

• Gli e^- emettono radiaz. con una precisa diret. e gli di propagazione
⇒ la somma di un vettore che varia nel tempo

• nel 2° filtro, Analizzatore, passano solo le componenti //

Gli atomi e^- di ruolo della lamina di polaroid si dispongono lungo fili rettilinei, lungo altre diret. la lamina si comporta come dielettrico e assorbe, passano solo componenti // asse polarizz.

⇒ Polarizzazione lineare

• La luce che viene da una sorgente naturale è non polarizzata
x r ogni e^- emette in una precisa diret.: la somma di tutti gli e^- che emettono in tutte le diret. non è polarizzata.

• La luce si polarizza per riflessione, la luce polarizzata da riflessione sull'occhio (Polarizzazione)

Si protegge con gli occhiali

• Il piano di vibrazione coincide con il vettore ottico e la diret. di propagazione.

• Ogni sistema ottico capace di trasmettere solo luce linearmente polarizzata si dice FILTRO POLARIZZANTE

Il POLARIMETRO è formato da 2 filtri che formano tra di loro un angolo ϕ , il 1° filtro è il POLARIZZATORE, il 2° è l'ANALIZZATORE

Descrivo la radiaz. luminosa con un vettore OTTICO

↓
Corrisponde al Campo elettrico.

Prendo 2 onde propaganti nello stesso mezzo ($\omega \neq k$) con una precisa ω polarizzate lungo y e z (PERTURBAZ. OTTICHE PERPENDICOLARI)

$$E_y = A_y \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$

$$E_z = A_z \cos(\omega t - kx + \varphi_2)$$

Aggiusto l'origine dei tempi, $x=0$,

$$\omega t - kx + \varphi_1 = \omega t'$$

$$\omega t - kx + \varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_1 = \omega t' + \Delta\varphi$$

l'onda polarizzata lungo z è
in ANTI FASE

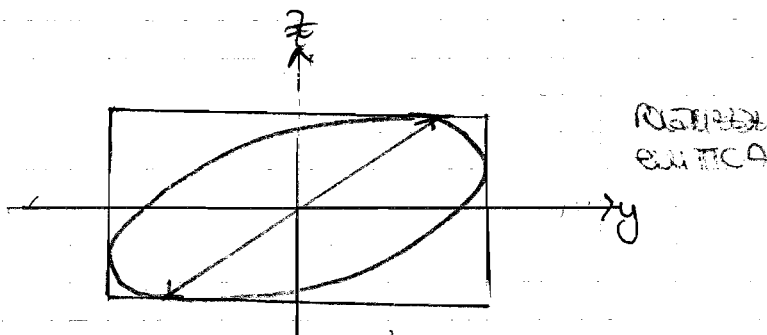
$$\frac{E_y}{A_y} = \cos \omega t' \quad \frac{E_z}{A_z} = \cos(\omega t' + \Delta\varphi) = \cos \omega t' \cos \Delta\varphi - \sin \omega t' \sin \Delta\varphi$$

$$\left(\frac{E_z}{A_z} - \frac{E_y \cos \Delta\varphi}{A_y} \right)^2 = \sin^2 \omega t' \sin^2 \Delta\varphi$$

$$\frac{E_z^2}{A_z^2} + \frac{E_y^2 \cos^2 \Delta\varphi}{A_y^2} - 2 \frac{E_y E_z \cos \Delta\varphi}{A_z A_y} = (1 - \cos^2 \omega t') \sin^2 \Delta\varphi$$

$$= \left(1 - \frac{E_y^2}{A_y^2} \right) \sin^2 \Delta\varphi$$

$$\frac{E_z^2}{A_z^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - \frac{2 E_y E_z \cos \Delta\varphi}{A_z A_y} = \sin^2 \Delta\varphi$$

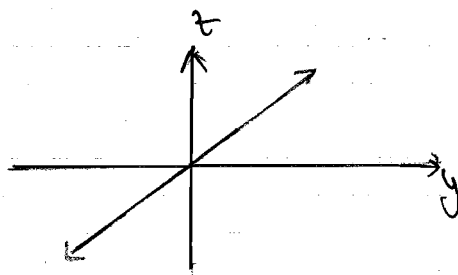


↓
Il vettore varia descrivendo un'ellisse nel tempo

A differenza della non polarizzata, segue una legge precisa

• Se $\Delta\varphi = 0 + 2\pi n$

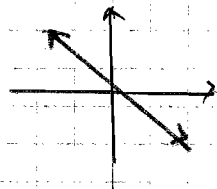
$$\frac{E_z^2}{A_z^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - \frac{2 E_y E_z}{A_y A_z} = 0$$



VIBRO
LUNGO
LA DIREZIONE
↓
Polarizzata
LINEARMENTE

• Se $\Delta\varphi = \pi + 2k\pi$

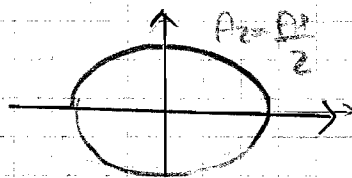
$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} + \frac{2E_x E_y}{A_x A_y} = 0$$



Luce linearm polarizzata
lungo qst direzione

• Se $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$

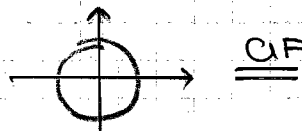
$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} = 1$$



Elisse "detto"

⇒ Inoltre se $A_y = A_x = R$

$$E_y^2 + E_x^2 = R^2 \Rightarrow \text{Polarizzazione circolare}$$



• FIGURE DI LISSAJOUS = grafico di una curva data dal sistema di eq parametriche $y = A_y \cos(\omega_y t + \phi_y)$ $z = A_z \cos(\omega_z t + \phi_z)$ ove $g_i A_i$ sono le ampiezze, ω_i le pulsaz, ϕ_i le fasi di 2 mov oscillatori ortogonali
⇒ se $\omega_y \neq \omega_z$ disegno periodico e altro $\phi_y \neq \phi_z$ (altre)

$0 < \Delta\varphi < \pi$

Polarizzata DESTROGIRA



$\pi < \Delta\varphi < 2\pi$

Polarizzata SINISTROGIRA



versì in cui ruota il
vettore elettrico rispetto allo
asse di propagazione vero cui viaggiando

Polarizzata può essere \parallel o \perp al piano di incidenza, lungo + al p.

SPM1 - 26 - @hotmail.it

Ciao - ciao

λ'

① Onde riflette max, riflesso min

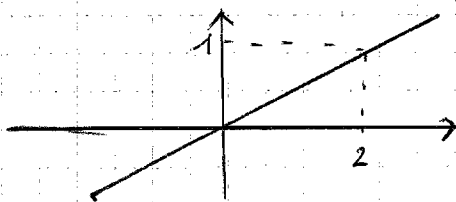
\parallel

② // // min, // max

\perp

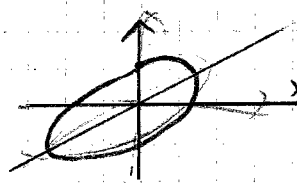
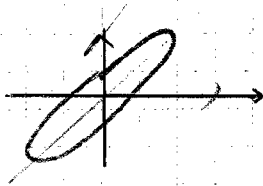
Il piano di polarizzazione è formato dalla direz di polarizzazione e
dal qll di propagazione

Se $\Delta\varphi = 0$ $T_2 = T_1$ $A_2 = \frac{A_1}{2}$



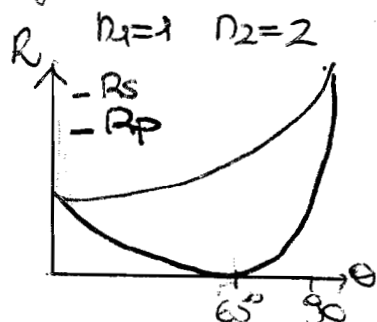
Se $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$ $T_2 = T_1$ $A_2 = A_1$

$A_2 = \frac{A_1}{2}$

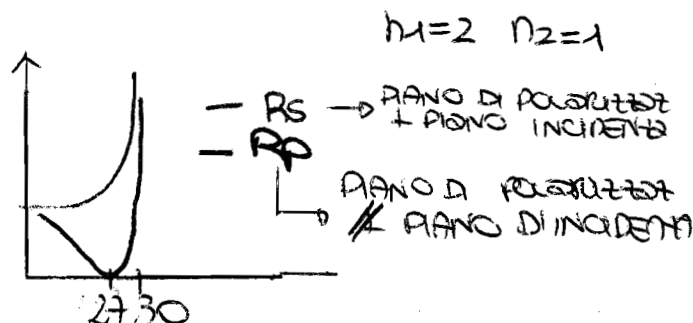


- Resina è un polimero (PVA) al quale per unito impregna di iodio. Durante la lavorazione le catene di PVA sono allungate & formano un vettore lineare di molecole. L'iodio si attacca alle catene rendendole conduttrici.
 \Rightarrow la luce // alle catene passa, q.e. \perp viene assorbito

Angolo di Brewster φ



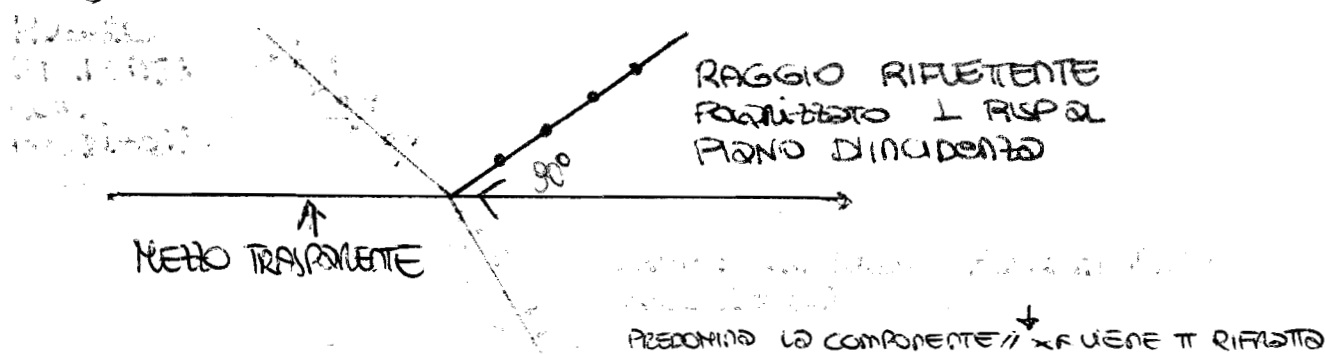
Esistono particolari valori di θ x cui il fascio \perp riflesso.



- Se l'onda è polarizzata // al piano d'incidenza, esiste un angolo per il quale l'onda è tutta riflessa.
- La luce naturale è non polarizzata, una istante per istante può scomporla nelle 2 componenti.

R_s (\perp piano incidente) R_p ($//$ piano incidente)
 \downarrow \downarrow
 È riflessa che viene tutto riflesso

- \Rightarrow così polarizzo la luce una riflessione o polarizzo il 40% della luce (infatti il raggio riflesso è polarizzato solo // al piano d'incidenza).
- \Rightarrow il raggio rifratto è parzialmente polarizzato.



- Si dimostra che l'angolo di Brewster si ha quando il fascio rifratto e quello riflesso sono \perp .

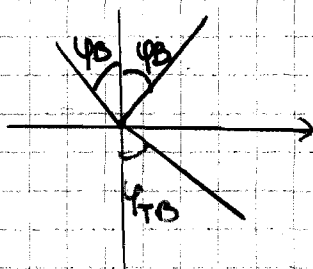
- I dipoli oscillano nella direzione della polarizzazione. Non possono emettere nella direzione del momento di dipolo elettrico.

\downarrow
 Pertanto gli e^- posti sulla superficie fra i 2 mezzi non possono emettere nessuna radiazione \perp a quella della luce rifratta polarizzata // al piano d'incidenza.

LEGGE DI BREWSTER

$$\tan \varphi = \frac{n_2}{n_1}$$

• Dimostro che i 2 fasci sono \perp a partire dalla legge di Brewster



$$\frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \varphi_t}{\cos \varphi_t}$$

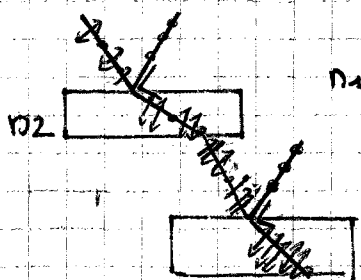
$$\tan \varphi_t = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \text{Dunque } \sin \varphi_t = \cos \varphi_t$$

$$\varphi_t = \frac{\pi}{2} - \varphi_t$$

$$\varphi_t + \varphi_t = \frac{\pi}{2}$$

Mezzo poco conveniente, rendimento 40%.



Perfondo strisciare il raggio rifratto a libera di vibraz \perp al piano d'incidenza

\Rightarrow Ottengo un raggio parzialmente polarizzato con due bracci intensità emisive, con ogni rifratt aumenta il grado di polarizzazione

ESERCIZIO Sovrapposizione di 2 onde con stessa A, ω che viaggiano in direzioni opposte

$$E_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$E_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

• Sommo col principio di sovrapposizione

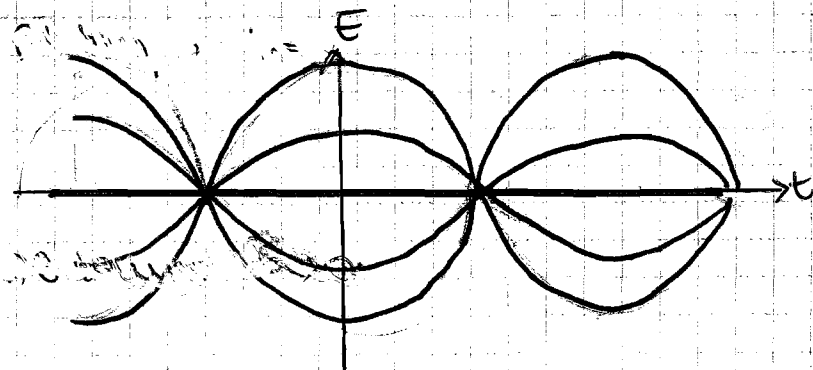
$$E = E_1 + E_2 = A [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)]$$

• Io so che

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

• Quindi

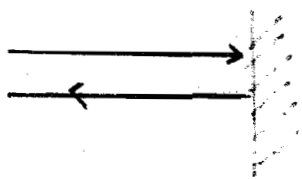
$$E = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$$



\Rightarrow ONDA STAZIONARIA

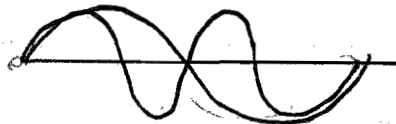
non propaga +,
ma la sua
ampiezza oscilla
nel tempo

Come ottengo un'onda stazionaria?



REFLETTI
RIFLETTI

Nel caso dell'onda luminosa non si vedono
ed occhio nudo, $\lambda \ll d$ è molto alta,
con la corda $\delta \ll \lambda$



Nella realtà non ci sono onde perfettamente stazionarie perché
la superficie assorbe parte dell'onda

\Rightarrow Otengo un'onda parzialmente stazionaria + una parte viaggiante
che deve essere assorbita dal corpo

Principio di sovrapposizione & interferenza

- In una regione dello spazio si sovrappongono più onde: in accordo col
PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, la risultante è la somma algebrica
delle onde.

\downarrow
Ciò vale fin tanto che la sol. dell'eq. delle onde è lineare:
se sommo 2 onde ho ancora una soluzione.

- Se l'intensità luminosa è molto elevata, la risultante non è la semplice
somma \Rightarrow non vale il principio.
- Con laser in laboratorio, per le sorgenti tecniche ecc. l'eq. delle onde è
lineare e quindi vale il principio.
- Un risultato del principio è che quando 2 fasci si incrociano, procedono
nella stessa modo di prima, sommandosi in quel punto.
- Quando l'intensità luminosa (energia media per unità di S e t)
in un punto non è uguale alla somma algebrica delle
intensità delle perturbazioni luminose separate, si ha il fenomeno
dell'INTERFERENZA

\downarrow
Può essere maggiore o minore.

- Dati 2 sorgenti puntiformi S_1 e S_2 che emettono onde sferiche con
pulsazioni ω_1, ω_2 e ampiezze A_1, A_2
- Le due onde viaggiano in diversi mezzi omogenei, i vettori d'onda
sono $\underline{k}_1, \underline{k}_2$
- Le posiz. delle sorgenti sono $\underline{r}_1, \underline{r}_2$, le coord. del punto P dove
si incontrano sono \underline{r}

$$E_1 = \frac{A_1^2}{4\pi R_1^2} \cos[\omega_1 t - \underline{k}_1(\underline{r} - \underline{r}_1) + \varphi_1]$$

$$\underline{E}_2 = \frac{A_2}{|r-r_2|} \cos[\omega_2 t - k_2(r-r_2) + \varphi_2]$$

con φ_1, φ_2 fasi iniziali delle 2 onde.

Se $|r-r_i| \gg \lambda_i$ con $i=1,2$ lo schermo vede arrivare 2 onde
 (perché $\frac{A_i}{|r-r_i|}$ è praticamente costante, chiamiamo $r-r_i' = r_i$)
 ↳ semplicità di scrittura

Quindi $k = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (\hat{r} - \hat{r}_i) \Rightarrow$ è parallelo alla diret di propagazione

$$\underline{E}_1 = A_1 \cos[\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1]$$

$$\underline{E}_2 = A_2 \cos[\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_2]$$

il campo elettrico totale è

$$\underline{E}(P) = \underline{E}_1(P) + \underline{E}_2(P)$$

Nello stesso punto l'intensità luminosa vale

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^T E^2 dt = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^T (\underline{E}_1 + \underline{E}_2)^2 dt \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^T [E_1^2 + E_2^2 + 2\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2] dt \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^T E_1^2 dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^T E_2^2 dt + 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^T \underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 dt \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^T \underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 dt \end{aligned}$$

Cerco le condiz per cui si ha qst termine, che diversifica

Nota che se \underline{E}_1 ed \underline{E}_2 sono polarizzate \perp fra loro $\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 = 0$

Ritorno nel caso $\underline{E}_1 \parallel \underline{E}_2$

Allora ottengo

$$I = I_1 + I_2 + 2A_1 A_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1) \cos(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_2) dt$$

l'integrale è nullo se $\omega_1 \neq \omega_2$

\Rightarrow scelgo $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Poniamo $\omega t - k_1 r_1 + \varphi_1 = \alpha t'$

Si ha dunque

$$[\omega t - k_2 r_2 + \varphi_2] - k_1 r_1 - \varphi_1 + k_1 r_1 + \varphi_1 =$$

$$= \omega t' + \underbrace{(k_1 r_1 - k_2 r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1)}_{\text{Fase costante} = \Delta \varphi}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2A_1 A_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t') \cos(\omega t' + \Delta \varphi) dt$$

$$= I_1 + I_2 + 2A_1 A_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t') \cos(\Delta \varphi) dt$$

$$- 2A_1 A_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t') \sin(\omega t') \sin(\Delta \varphi) dt$$

Le 2 onde sono 2 sinusoidi infinite, ma nelle realtà sono gettate eccitate che emettono un treno d'onde che è un pezzo di sinusoidale

→ $\varphi_2 - \varphi_1$ varia in maniera casuale, dunque mediamente $\cos(\Delta \varphi)$ ha come valor medio 0

Perché non si annulli occorrono sorgenti mutuamente coerenti, che non esistono in natura, per questo $\Delta \varphi = \text{cost}$

$$I = I_1 + I_2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta \varphi) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\cos^2(\omega t')}_{T/2} dt$$

$$= I_1 + I_2 + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_1 A_2 \cos(\Delta \varphi)$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta \varphi)$$

Se le 2 ampiezze sono uguali

$$I = 2I_0 (1 + \cos(\Delta \varphi))$$

$\cos \Delta \varphi < 0$ INTERF DISTRUTTIVA
 $\cos \Delta \varphi > 0$ INTERF COSTRUTTIVA

A seconda che sia positivo o negativo qst termine causa le FRANGE D'INTERFERENZA

↳ totale distruttiva // $I = 0$ $\Delta \varphi = -\pi + 2k\pi$ $\Delta \varphi = 2k\pi$
 si ha solo se $I_1 = I_2$ $\Delta \varphi = -\pi + 2k\pi$ $\Delta \varphi = 2k\pi$

OSS Nei fenomeni naturali non vediamo interferenza istante x istante, ma mediamente non sussiste x

$$\overline{\cos(\omega t)} = 0$$

Immaginiamo che le onde viaggino nello stesso mezzo

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) =$$

• Interferenza è max se

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi m$$

$$\frac{(r_1 - r_2)}{\lambda} + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} = m$$

Metto qst parte a zero

⇒ la differenza di cammino è pari ad un n° intero di lunghezze d'onda

• Interferenza distruttiva

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi m + \pi$$

$$\frac{(r_1 - r_2)}{\lambda} + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} = m + \frac{1}{2}$$

numero dispari di mezza lunghezze d'onda

• Devono avere stesso ν , campi \vec{E} uow \perp , $\Delta\varphi = \text{cost}$

$$I_{\text{Tot}} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = (k_1 r_1 - k_2 r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

• È l'unica quantità variabile, varia nelle sorgenti naturali, emissioni di e eccitati, sono come oscillatori armonici, $n \cdot 10^{-8}$ s emettono un treno d'onda (=sinusoide troncata) che finisce qnd l'e esaurisce tutta la sua energia.

$$\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$$

$$\Delta l \approx 3 \text{ m}$$

• Ogni punto della sorgente emette un treno d'onda in maniera casuale (la direz di vibraz del vettore ottico e la fase mutale variano per ogni treno d'onda ⇒ un osservatore uow coglie la variaz totale istante per istante x $\Delta\varphi$ variaz tip rapidamente)

• 2 sorgenti b.c. $\Delta\varphi = \text{cost}$ si dicono MUTUAMENTE COERENTI

• Se 2 onde hanno la stessa ampiezza $I_1 = I_2 = I_0$

$$I = 2 I_0 (1 + \cos \Delta\varphi) = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 - \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\underbrace{n_1 r_1 - n_2 r_2}_{\text{CAMMINO OTTICO}})$$

• Se le onde si muovono nella stesso mezzo

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (\underbrace{r_1 - r_2}_{\text{CAMMINO GEOM}})$$

Se $\varphi_2 \neq \varphi_1$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= 2\pi m$$

$$m=0,1,2,\dots$$

ho dei MASSIMI DI INTERFERENZA

$$I = 4I_0$$

$$= (2m+1)\pi \text{ ho dei MINIMI DI INTERFERENZA}$$

$$I = 0$$

I due casi si chiamano INTERFERENZA COSTRUTTIVA e INTERFERENZA DISTRUTTIVA

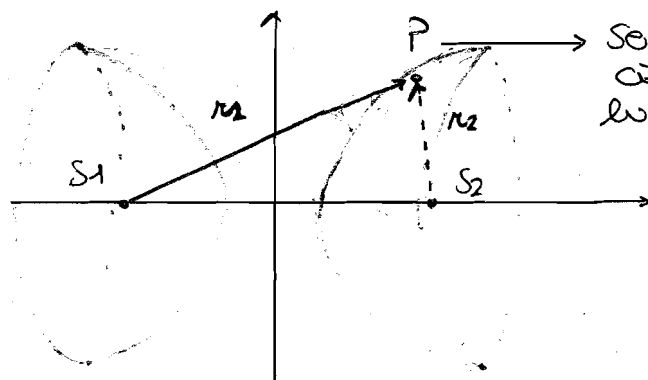
Onde in fase, la differenza di cammino è un multiplo pari di $\lambda/2$

Onde in opposizione di fase, la differenza di cammino è un multiplo dispari di $\lambda/2$

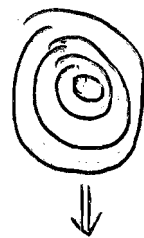
Ho 2 famiglie di iperboli di rotazione con focus nelle 2 sorgenti

$$\frac{x_2 - x_1}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} = m \quad \text{MAX}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} = m + \frac{1}{2} \quad \text{MIN}$$



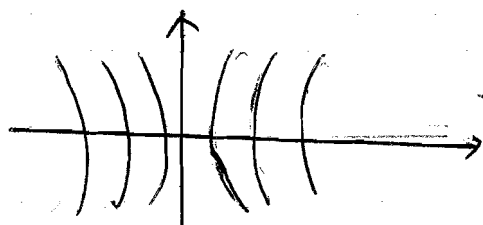
Se taglio con piani \perp ottengo cif luminose e buie con la luce che varia gradualm



CIF

Se taglio con piani paralleli osservo delle FRANGE D'INTERFERENZA sono iperboliche

IPERBOLI



Le linee di illuminazione massima e minima sono date dall'intersezione tra lo schermo e gli iperboli

TEMPO DI MUTUA COERENZA

Il tempo T che compare nell'integrale che fornisce il termine di interferenza può essere interpretato come il tempo di rilevazione, la costante di tempo del sistema di rilevazione

Tempo nel quale il rivelatore dà la risp.

Si ha l'interferenza se la differenza di fase $\Delta\varphi$ non varia nel tempo T che dipende quindi dal rivelatore.

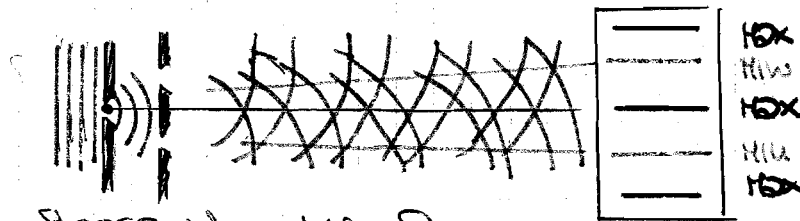
In $\Delta\varphi$ la variaz di fase dovuta alla dif di cammino delle 2 onde è cost, può variare solo $\varphi_2 - \varphi_1$

Definisco TEMPO DI MUTUA COERENZA T_c il tempo necessario affinché $\varphi_2 - \varphi_1$ vari di un radiente

- Se $\tau_c \gg T$ le sorgenti si dicono **MUTUAMENTE COERENTI**
- Se $\tau_c < T$ sono dette **MUTUAMENTE INCOERENTI** (con riusciamo a vedere il fenomeno d'interferenza)
- Nei laser artificiali $\tau_c \approx 10^{-3} s$, con nelle sorgenti termiche naturali $\tau_c \approx 10^{-8} s$
- Un sistema fotografico rapido ha un tempo di esposizione $T \approx 10^{-3} s$
 \Rightarrow vede l'interferenza tra 2 laser ma non tra le sorgenti naturali

ESPERIMENTO DI YOUNG

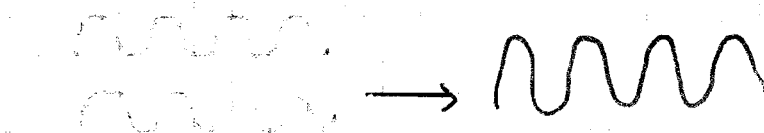
- Se prendo una sorgente S e la duplico con metodi ottici, ottengo figure d'interferenza $\propto \Delta\varphi = \cos$



Bande chiare e scure
 alternate
 \Rightarrow FRANGE
 D'INTERFERENZA

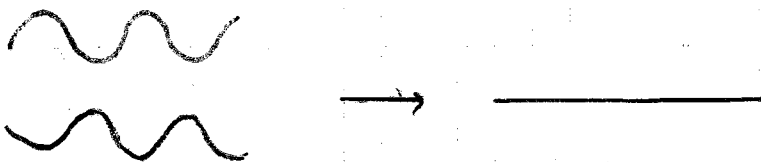
- Stessa λ , $\Delta\varphi = 0$
- È l'exp + semplice per ottenere sorgenti mutualmente coerenti.
- Cmq c'è anche la diffrazione oltre che all'interferenza, ma c'è qst che predomina
 \rightarrow perché i fon hanno dim confrontabili con λ

ONDE IN FASE



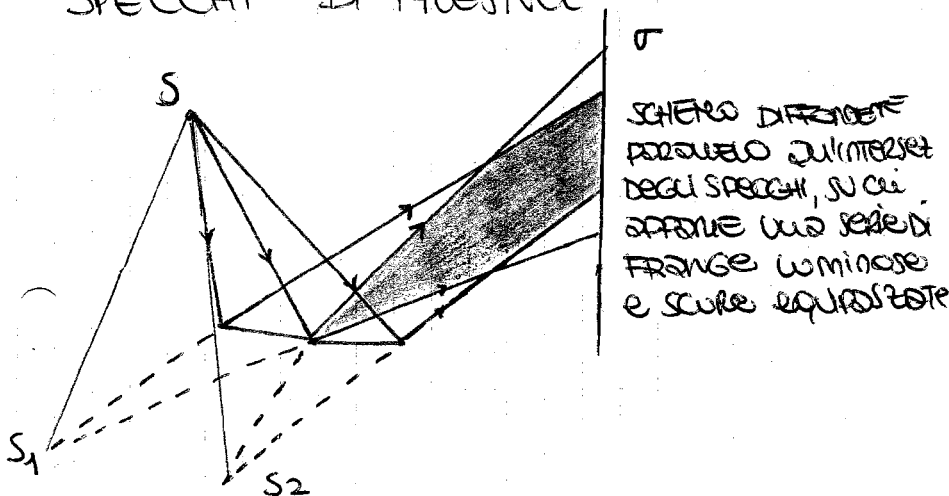
INTERFERENZA
 COSTRUTTIVA

ONDE SFASATE DI $\lambda/2$ (PI)



INTERFERENZA
 DISTRUTTIVA

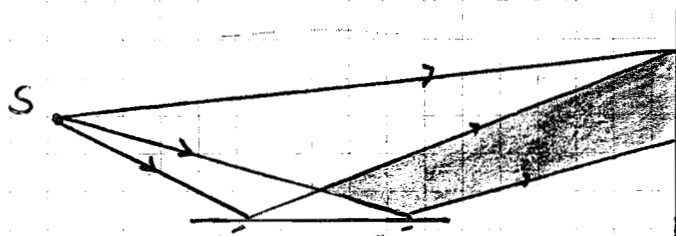
SPECCHI DI FLEISNEL



SCHERMO DIFFRAZIONE
 PARALELO ALL'INTERFETTA
 DEGLI SPECCHI, SU CUI
 APPARE UNA SERIE DI
 FRANGE LUMINOSE
 E SCURE EQUIDISTANTI

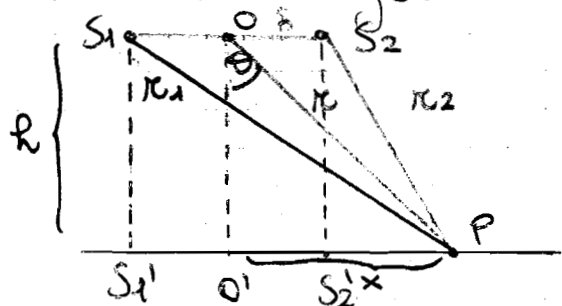
- 2 specchi quasi a 180° riflettenti
 Creano 2 img virtuali S_1 ed S_2 della sorgente S che è nel fuoco dell'obiettivo.
 I 2 fasci riflessi si sovrappongono dando origine all'interferenza.
 La larghezza delle frange dipende dal colore \rightarrow quindi ha una prop λ

SPECCHIO DI LEAYD



Con lo specchio di Lloyd otteniamo interferenza tra onde luminose provenienti da una sorgente puntiforme e dalla sua immagine speculari in uno specchio piano.

ESPERIMENTO DI YOUNG



SUPPONTATO
 θ PICCOLO!

Sorgenti coerenti
 $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$

SCHERMO

• Differenza di cammino geometrico?

$$r_1^2 = R^2 + \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = R^2 + \left(x - \frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$r_1^2 - r_2^2 = 2 \times \delta$$

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2 \times \delta$$

• Siccome $\theta \rightarrow 0$ $r_1 + r_2 \approx 2r$

$$2r(r_1 - r_2) = 2 \times \delta$$

$$r_1 - r_2 = \frac{x \cdot \delta}{r} = \frac{x \delta}{x} \sin \theta = \delta \sin \theta \approx \delta \theta$$

• Differenza di fase con la quale le onde arrivano sullo schermo

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta \theta$$

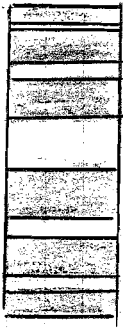
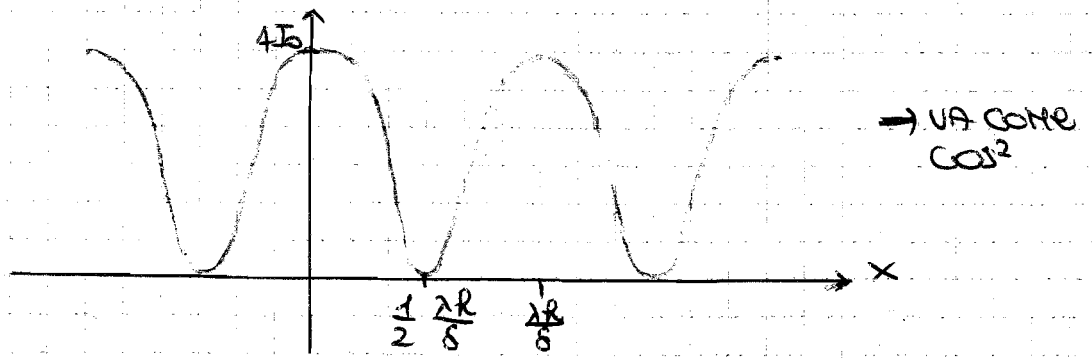
$$x = R \tan \theta \approx R \theta$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \cdot \frac{x}{R} \begin{cases} 2\pi m \\ (2m+1)\pi \end{cases}$$

$$x_{MAX} = \frac{m \lambda R}{\delta}$$

$$x_{MIN} = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda R}{\delta}$$

• Se con un fotodiodo misuro I al variare di x



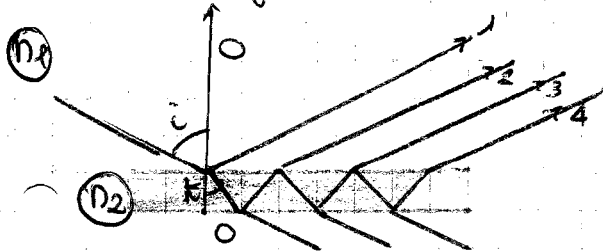
→ Ai bordi i treni d'onda si sovrappongono solo parzialmente, θ non è più piccolo!

Se al posto di luce monocromatica abbiamo la luce bianca, nel punto $x=0$, $\forall \lambda$ componente bianca, si ha il max, poi ho massimi + dispersi $x \neq 0$ ogni componente λ varia leggermente

LAMINE SOTTILI

INTRODUZIONE

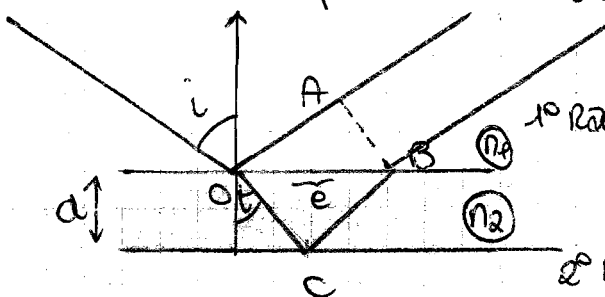
- Un esempio di lamina sottile è la bolina di sapone sulla cui sup si hanno le frange d'interferenza.



- Lamina sottile a facce //, spessore d
- I raggi sono tutti //, ma hanno ampiezza via via decresce (se n_2 è un mezzo trasparente, l'onda è quasi tutta trasmessa)

- Sono emessi tutti dalla stessa sorgente, ogni punto fa da sorgente mutuam coherente $\phi_2 - \phi_1 = 0$
- Qst sorgenti interferiscono all'ov, ma se metto una lente, interferiscono nel suo fuoco.

- Amplizziamo i primi 2 raggi → primi 2 loro \pm sono sup di equifase



$$1^o \text{ Raggio } l_1 = n_1 \overline{OA} = n_1 \overline{OB} \sin i = 2n_1 d \sin i \approx 2n_1 d \cos r$$

$$2^o \text{ Raggio } l_2 = 2n_2 e = 2n_2 \frac{d}{\cos r}$$

• Faccio la differenza di cammino

$$\begin{aligned} \ell_2 - \ell_1 &= \frac{2n_2d}{\cos r} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \sin i \sin r \right) \\ &= \frac{2n_2d}{\cos r} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \sin i \sin r \right) \end{aligned}$$

• Per la legge di Snell

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1} \sin r$$

• Dunque $\ell_2 - \ell_1 = \frac{2n_2d}{\cos r} (1 - \sin^2 r) = 2n_2d \cos r$

• Pertanto la diff di fase

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} (\ell_2 - \ell_1) - \pi$$

↓

Quando si riflette in O posso ad un mezzo ottico + denso e si fa un vettore sfasato di π

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{12} &= \frac{4\pi n_2 d}{\lambda} \cos r - \pi && \rightarrow 2m\pi && \text{Max} \\ &&& \rightarrow (2m+1)\pi && \text{Min} \end{aligned}$$

• Dunque

$$\begin{cases} \frac{4\pi n_2 d}{\lambda} \cos r = (2m+1)\pi & \text{MAX} & \frac{2n_2 d}{\lambda} \cos r = m + \frac{1}{2} \\ \frac{4\pi n_2 d}{\lambda} \cos r = (2m+2)\pi & \text{MIN} & \frac{2n_2 d}{\lambda} \cos r = m + 1 \end{cases}$$

• Ipotesi che 1 e 2 sono in opposizione di fase.

• Cosa accade fra 2 e 3?

La diff di fase è uguale a quella di prima, senza il $-\pi$ perché non c'è una rifl su un mezzo ottico + denso

$$\Delta\varphi_{23} = \frac{4\pi n_2 d}{\lambda} \cos r = 2m'\pi \text{ per } \lambda$$

⇒ sono in fase

2, 3, 4, 5... sono in fase tra loro, 1 in opposiz di fase

⇒ ha interferenza distruttiva (non ho tutto x e m + eliminato degli altri).

• Se 1 e 2 fossero stati in fase

$$\Delta\varphi_{23} = (2m+1)\pi \Rightarrow 3 \text{ è in opposiz di fase}$$

$$\Delta\psi_{2,4}?$$

$$\Delta\psi_{2,4} = 2\Delta\psi_{2,3} = 4\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) = 4\pi m + 2\pi \quad \text{sono in fase}$$

• Dunque sono in fase 1, 2, 4, 6... \Rightarrow interferenza costruttiva
fuori fase 3, 5, 7, ... complessiva

le frange d'ombra sono circolari, chiare o scure



• In alcuni casi (bordo focalizzato) sulla retina l'interferenza di una lamina sottile al filtro.

BATTIMENTI

$$E_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$\omega_2 = \omega_1 = \Delta\omega \quad \text{piccola!}$$

$$E_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$k_2 - k_1 = \Delta k$$

Sovrappongo le 2 onde con freq simili

$$E = E_1 + E_2 = A [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)]$$

lo so che $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ dunque

$$E = 2A \left[\cos\left(\frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} + \frac{(k_2 + k_1)x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} + \frac{(k_2 - k_1)x}{2}\right) \right]$$

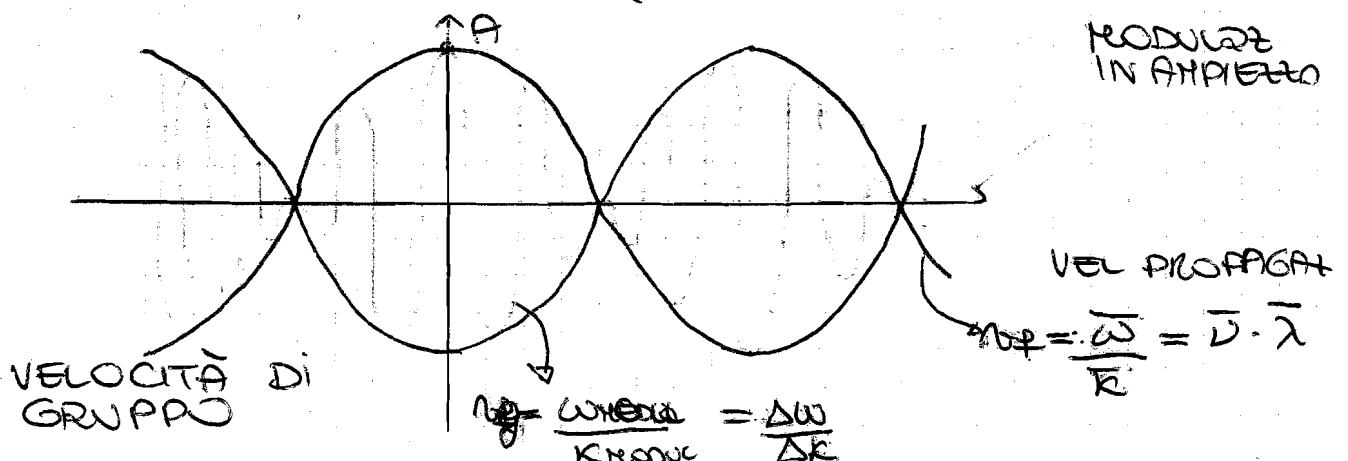
Valore medio di ω $\omega_{\text{medio}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

ω di modulazione $\omega_{\text{MOD}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

Valore medio di k $k_{\text{medio}} = \frac{k_1 + k_2}{2}$

k di modulazione $k_{\text{MOD}} = \frac{k_2 - k_1}{2}$

$$E = 2A \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x) \cdot \cos(\omega_{\text{MOD}} t - k_{\text{MOD}} x)$$



Se si considera moto piccolo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \bigg|_k$$

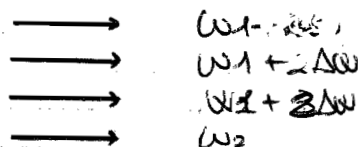
La velocità con cui si muovono le creste è diversa dalla v con la quale si muove il pacchetto

È la v_g , quella del pacchetto, a determinare la velocità di trasporto dell'energia.

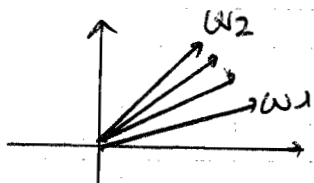
Uso il teorema di Fourier per sommare N onde con stesso A e frequenze comprese fra ω_1 e ω_2 .

Ciascuna onda può essere rappresentata con un vettore rotante con ugual modulo.

Inizialmente sono tutti paralleli



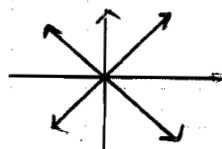
Poi ognuno ruota con ω diverso, (ma i $\Delta\omega$ sono tutti =)



$$\Delta\omega = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{n-1}$$

Esiste un tempo t_1 t.c.

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)t_1}{(n-1)} = \frac{2\pi}{n}$$

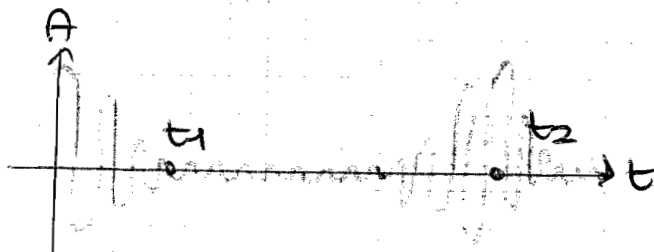


⇒ PER UNO TEMPO

Ed un tempo t_2 per il quale sono paralleli

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)t_2}{(n-1)} = 2\pi$$

⇒ MINOR TEMPO



24

$$\frac{t_2}{t_1} = n$$

Se n è grande è come se avessi un solo pacchetto

Per ogni componente armonica dell'onda, se incontro un mezzo il cui indice di rifrazione dipende da λ , viaggia con v diverso ⇒ DISTORSIONE, ma l'energia trasportata dall'onda non varia

Il treno d'onda di λ contiene infinite λ , per questo solo quando sono ben allineate danno segnale, per la maggior parte del tempo non si vede nulla.

Un treno d'onda dura $2t_1$.

$$\Delta t = 2t_1 = 4\pi \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{1}{\Delta \omega} = \frac{2}{\Delta \omega}$$

DURATA DI OGNI GRUPPO DI OSCILLAZIONI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = 2 \quad (\text{HEISENBERG}) \quad (\text{COME GRANDEZZA NONLINEARE, SE } n \rightarrow \infty \quad \Delta t \cdot \Delta \omega = 2)$$

Se $\Delta t \rightarrow \infty$ ho il caso di un'onda monocromatica (con Δt grande, con $\Delta \omega$ piccolo \Rightarrow ")

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\Delta \lambda = -\frac{c}{\nu^2} \cdot \Delta \nu$$

Ma è un'approx $x \ll 1 \Rightarrow \nu = \frac{c}{n(\lambda)}$

\Rightarrow caso met'anni degli elettroni e ν sono simili \Rightarrow trascurare

$$\frac{|\Delta \lambda|}{\lambda} = \frac{|\Delta \nu|}{\nu}$$

Avevo scritto $\Delta \nu = \frac{1}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{1}{\nu \Delta t} = \frac{T}{\Delta t} = \frac{1}{N}$$

$$\frac{|\Delta \lambda|}{\lambda} = \frac{1}{N} \quad \downarrow$$

All'aumentare del n° di lunghezze d'onda contenute in un treno d'onda o numero di periodi, aumenta la monocromaticità

NUMERO DI PERIODI CONTENUTI IN $\Delta t = N$

• Maggiore è la lunghezza d'un treno d'onda, maggiore è la sua purezza spettrale

\hookrightarrow 0 lunghezze d'onda o periodi T contenuti da un treno d'onda

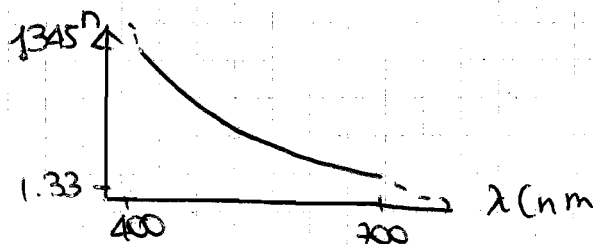
• In un mezzo non dispersivo ogni componente armonica del gruppo viaggia alla stessa v , la sua formula non si modifica passando nel mezzo.

• Se c'è dispersione ($n = n(\nu)$), ogni onda viaggia con v diverso, la $v_g \neq v_f$

Se $n(\nu)$ diminuisce con λ , $v_g < v_f$

• Andamento di n nel visibile

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$



Velocità di gruppo

$$v = \frac{v_f}{\lambda} \quad v_f = \frac{c}{n}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d(1/\lambda)} = -\lambda^2 \frac{d\omega}{d\lambda}$$

$$v_g = v_f - \lambda c \cdot \frac{d(1/n)}{d\lambda} = v_f + \frac{\lambda c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = v_f \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

Se n ha un andamento normale,
qst derivata è negativa.

Possiamo ricavare in un altro modo qst relazione

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d(1/\lambda)}{d\omega}$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{1}{v_f} + \frac{\lambda}{n v_f} \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_f} \left[1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right]$$

↳ QST DERIVATA È POSITIVA
⇒ ESSENDO $v_g = \frac{v_f}{1 + \dots}$

$$v_g < v_f$$

Monocromaticità treno d'onda

Per una scarica a bassa pressione in vapori di mercurio contenente l'isotopo Hg^{198} la riga di lunghezza d'onda

$$\lambda = 5.46 \mu\text{A}$$

Presenta un allargamento $\Delta\lambda = 0,005 \text{ A}$

Il numero di lunghezze d'onda contenute nel treno d'onda

$$N = \frac{5.461}{0.005} \approx 10^6$$

E la lunghezza del treno d'onda è

$$l = 10^6 \cdot 5,461 \cdot 10^{-7} = 0,54 \text{ m}$$

DIFFRAZIONE

Fenomeno per il quale la luce, incontrando ostacoli, non propaga
+ in linea retta.
Cio' avviene se la dim dell'ostacolo e' dell'ordine di grandezza
della λ del raggio.

Nell'ottica geometrica si suppone $\lambda \rightarrow 0$

La diffrazione viene studiata nel 1600 \Rightarrow GRIMALDI

Da lui deriva il termine diffrazione, \propto per illustrare il
fenomeno uso l'ovverto DIFFRACTE

Da DIFFRINGER = spartire

Deduce che almeno ogni tanto la luce deve propagarsi
in maniera ondecatona.

Pratica un foro su una finestra facendo entrare luce
solare.

La propagat d'onda ovverra' lungo un arco:
frappo nel caso un ostacolo notai che l'ombra
complessiva e' maggiore \propto a sono zone di penombra

HUYGENS La luce non e' fatta da corpuscoli limitati
ma da onde che perturbano un mezzo
materiale, l'ETERE.

Analogia con le onde sonore che hanno
bisogno di un mezzo per propagarsi

$d \gg \lambda$

Le onde propagano su di la' della
fenditura indisturbate

\Rightarrow linea retta

$d > \lambda$

$d < \lambda$

Principio di Huygens-Fresnel

Ogni punto di un fronte d'onda primario funge da fronte
d'onda \times una secondaria onda sferica. Il fronte d'onda
dopo un certo tempo e' l'inviluppo dei fronti d'onda
sferici secondarie spinti dalle

• Fresnel lo modifica dimostrando che non si formano onde regressive.

• Kirchhoff dimostra che il principio può essere dedotto dall'eq delle onde

• PRINCIPIO DI HUYGENS da ciascun punto di un fronte d'onda si comporta come una sorgente puntiforme secondaria di fronti d'onda sferici: la forma in cui si evolve il fronte d'onda è data dall'involuppo di tutti i fronti d'onda sferici delle sorgenti secondarie

• PRINCIPIO DI HUYGENS-FRESNEL I punti di una superficie σ qua sono raggiunti da un'onda, diventano origine di onde secondarie e la perturbazione osservata al di là della σ si ottiene dalla sovrapposizione delle onde secondarie.

• I punti di una superficie d'onda monocromatica σ fungono da sorgenti irradianti di onde sinusoidali secondarie con frequenza uguale a quella dell'onda principale. Il disturbo ottico al di là di σ risulta dall'INTERFERENZA di qst onde

• Le onde secondarie sono emesse con un anticipo di fase pari ad $1/4$ di periodo rispetto all'onda incidente ($\pi/2$)

• L'ampiezza del vettore ottico di ciascun onda secondaria decresce secondo la rel:
$$r = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

dove θ è l'angolo tra la normale alla σ e la direzione dell'onda incidente.

(Il fronte regressivo non compare perché ha un fattore smpr + piccolo!)

• Espandendo l'eq delle onde in contributi via via minori

$$\psi_0 = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$$

↓ ↓ ↓
Approssimaz Approx $\propto \lambda^2$
ottica geom Huygens, tiene conto dei termini in λ
 $\lambda \rightarrow 0$

• La frequenza delle onde secondarie è uguale a quella delle primarie.

• Onde secondarie: anticipo di fase $\frac{\pi}{2}$

• L'ampiezza della perturbazione $\propto A(\sigma)$

Il disturbo luminoso vale

$$q(\sigma) = \frac{1}{2} \cos \theta$$

• Il contributo elementare dell'ampiezza della perturbazione ottica dovuto ad un elemento infinitesimo $d\sigma$ del fronte d'onda in un punto P distanter

$$dE = \frac{1}{r} \gamma(r - vt) \cdot q(\theta) dr$$

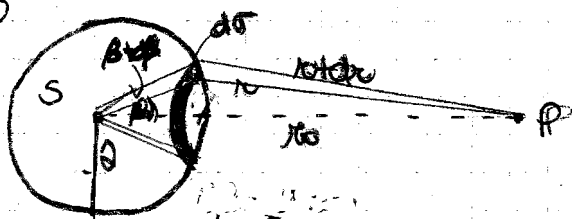
↳ Ampiezza dei contributi alla perturbazione in un punto P

$q(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \rightarrow$ angolo formato dalla direz di propagazione dell'onda relativa all'area $\Delta\sigma$ e la direz congiungente $\Delta\sigma$ con P

$$q(\theta) = \frac{1 + \cos(\pi)}{2} = 0 \Rightarrow \text{no onda REGRESSIVA}$$

$dE \rightarrow$ contributo elementare all'ampiezza della perturbazione ottica dovuta a un elemento infinitesimo $\Delta\sigma$ del fronte d'onda in un punto P distante r dalla sorgente

ONDA SINDRIFERICA
SPECICA



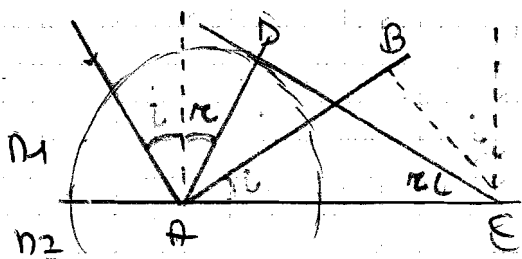
$$r^2 = a^2 + (a + r_0)^2 - 2a(a + r_0)\cos\beta$$

$$2r dr = 2a(a + r_0)\sin\beta d\beta$$

$$\sin\beta d\beta = \frac{r}{a(a + r_0)} dr$$

$$d\sigma = (2\pi a \sin\beta)(a d\beta)$$

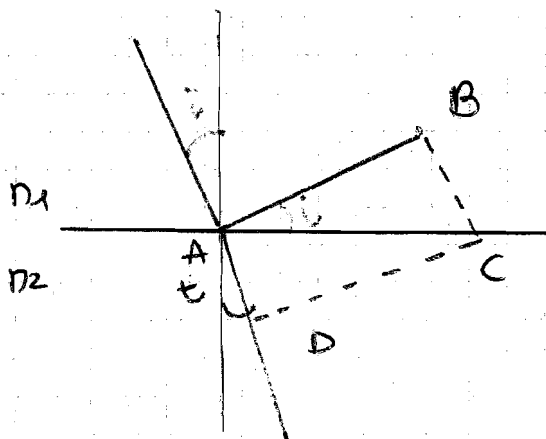
$$dE = \frac{2\pi}{r} \frac{dr}{(a + r_0)} \text{ da } q(\theta) = 2\pi \frac{a}{a + r_0} q(\theta) dr$$



$$v_1 \Delta t = BC$$

$$\hat{ABC} = \hat{ADC}$$

$$\hat{C} = \hat{r}$$



$$v_1 \Delta t = BC$$

$$v_2 \Delta t = AD$$

$$v_2 < v_1$$

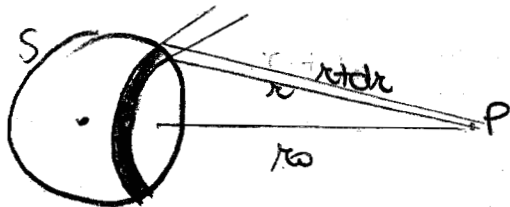
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$BC = AC \sin i = v_1 \Delta t$$

$$AD = AC \sin r = v_2 \Delta t$$

• Con Huygens - Fresnel si ritrovano le leggi dell'ottica che sono un'approx successive

Risultante della perturbazione che provengono dalle varie zone infinitesime?
2 perturbazioni distanti da giungono in P con una diff di fase
 $d\phi = \frac{2\pi}{\lambda} dr$



$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r$$

→ li rappresentiamo come vettori di lunghezza
circa uguale distanti fra loro, vale
angolo $\Delta\alpha$

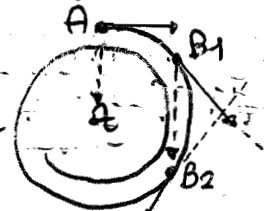


(nel caso in cui giungano in fase: $\Delta\alpha = 2\pi$, $\lambda = \Delta r$
la spirale si chiude)

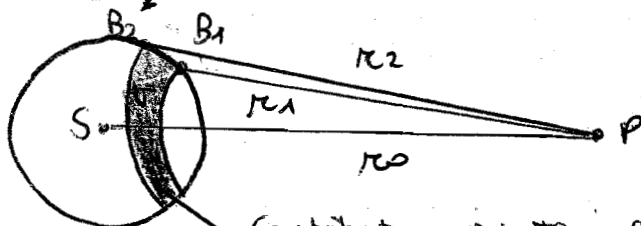
In generale la spirale non si chiude, lei
sono sempre + piccoli ⇒ SPIRALE

Questa curva si chiama CURVA DI VIBRAZIONE relativa alla sovrapposizione
della superficie d'onda e in zone elementari circolari

⇒ Disturbo luminoso

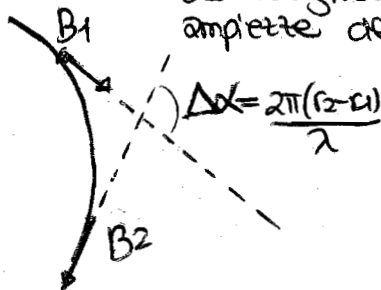


CURVA DI VIBRAZIONE RELATIVA ALLA SUDDIVISIONE
DELLA SUPERFICIE D'ONDA IN ZONE CIRCOLARI



Contributo di tutte le cif. di raggi r_1, r_2 : ha come
risultato la corda $A-B_2$

La lunghezza dell'arco di spirale $A-B_2$ è la somma aritmetica di
ampiezze delle perturbazioni che viene da Δr



$$\Delta\alpha = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

$$\rho = \frac{|\Delta S|}{\Delta\alpha} = \frac{2\pi \frac{a}{a+r_0} q(\theta) \Delta r}{2\pi \Delta r}$$

$$\rho = \frac{a\lambda}{(a+r_0)} \cdot q(\theta)$$

RAFFORZO DI CURVATURA
DELLA SPIRALE

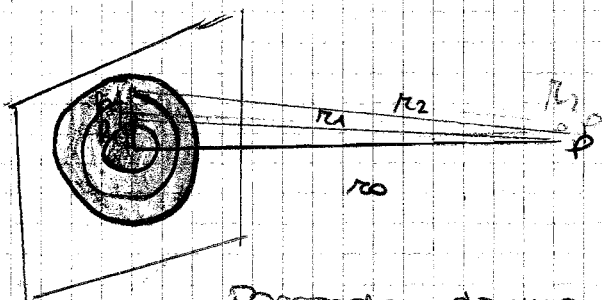
Il raggio della spirale che si avvia da come $q(\theta)$,
quindi diminuisce lentamente

Ampiezza del segnale in P

$$A_P = \frac{a\lambda}{a+r_0}$$



Inverso della distanza del punto dalla sorgente



Sulla superficie sferica S tracciamo delle cif di raggio

$$r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$$

$$r_2 = r_0 + \lambda$$

$$r_n = r_0 + n \frac{\lambda}{2}$$

Passando da una zona all'altra varia il cammino di $\frac{\lambda}{2}$

↳ Fra un contributo e l'altro c'è uno sfasamento di π , ogni contributo è meno intenso dell'altro

⇒ ZONE DI FRESNEL

$$r_n = r_{n-1} + \frac{\lambda}{2}$$

$$R_n^2 = r_n^2 - r_0^2$$

$$r_n^2 = r_{n-1}^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda r_{n-1}$$

$$\lambda \ll r_0 \quad \frac{\lambda^2}{4} \text{ è trascurabile}$$

$$r_n^2 = r_{n-1}^2 + \lambda r_{n-1}$$

$$R_1^2 = r_1^2 - r_0^2 = r_0^2 + \lambda r_0 - r_0^2 = \lambda r_0$$

$$R_2^2 = r_2^2 - r_0^2 = r_1^2 + \lambda r_1 - r_0^2 = r_0^2 + \lambda r_0 + \lambda r_1 - r_0^2 = \lambda(r_0 + r_1)$$

$$R_n^2 = \lambda(r_0 + r_1 + \dots + r_n) \approx n \lambda r_0$$

All'aumentare della distanza diminuisce l'ampiezza del segnale

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

$$= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{n-2}}{2} - A_{n-1} + \frac{A_n}{2} \right) + \frac{A_n}{2}$$

Siccome $\frac{A_{n-2}}{2} + \frac{A_n}{2} = A_{n-1}$ semplifico

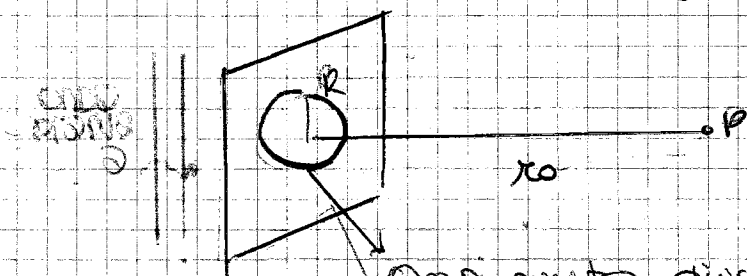
$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_n}{2}$$

Per N GRANDE $A_n \ll A_1$, dunque l'ampiezza in P

$$A = \frac{A_1}{2}$$

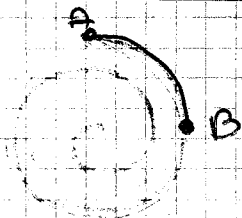
metà ampiezza della 1 zona

• Schermo con un foro di raggio R



Ogni punto diventa sorgente d'onde secondarie

• Curve di vibraz



A = quantità emessa in O

B = punti sull'cif

• All'aumentare dell'apertura aumentano le frazioni delle zone di Fresnel che passano

• Quando il raggio è uguale all' della prima zona di Fresnel, l'ampiezza è A_1 . $\Rightarrow \text{Max}$

• Quando apre la 2° $A_1 - A_2$

\rightarrow ottengo massimi e minimi

Per avere l'effetto posso spostare P dall'angolo
la fenditura

Per $P \rightarrow \infty$ vedo luminoso

• Primo massimo $R = R_1$

$$r_0 = \frac{R^2}{\lambda}$$

$$l = r - r_0$$

$$r = l + r_0$$

$$r^2 = R^2 + r_0^2$$

$$(l + r_0)^2 = R^2 + r_0^2$$

$$2(l + r_0)(\Delta l + \Delta r_0) = 2 r_0 \Delta r_0$$

$$\Delta r_0 = - \frac{(l + r_0)}{l} \Delta l = - \frac{r}{r - r_0} \Delta l$$

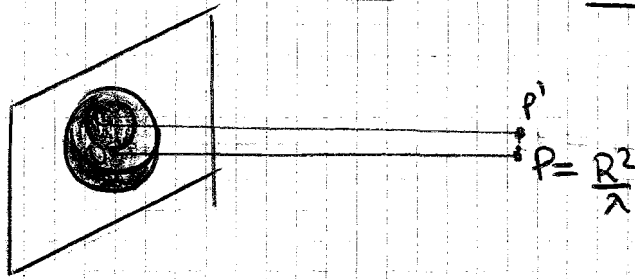
$$|\Delta r_0| = \frac{r}{r - r_0} \frac{\lambda}{2} \sim \frac{\lambda}{2} \quad \text{se } r \gg r_0$$

↳ Sono molto vicini, difficilmente apprezzabili

$$\text{Se } r_0 \gg \frac{R^2}{\lambda} \Rightarrow \text{FRAUNHOFER}$$

$$r_0 \lesssim \frac{R^2}{\lambda} \Rightarrow \text{FRESNEL}$$

• Fraunhofer: schema coperto da un'onda piana, il punto d'osservazione è a grandi distanze della fenditura

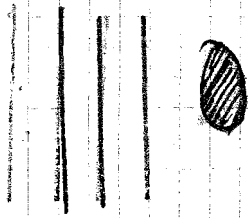


\Rightarrow 2 zone \Rightarrow $P = \frac{R^2}{\lambda}$

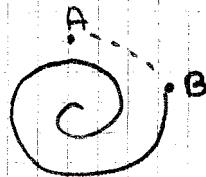
In P' vedo parte di 1, 2, 3 zone \Rightarrow + luce che in P !

Frazioni di zone di Fresnel \neq

• Focci incidente un'onda piana su un ostacolo opaco che fa passare solo parte del fronte d'onda



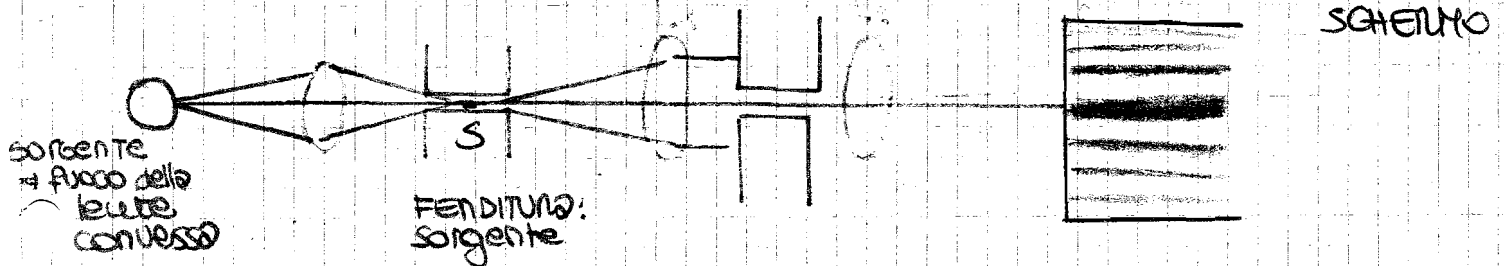
Curva di Huygens: manca un pezzo



Muovendo B, la sempre luminosità, diminuisce ma c'è sempre luminosità

• Huygens di Poisson \Rightarrow c'è sempre luce sul piano + ostacolo

QST x R la luce è un fenomeno ondulatorio



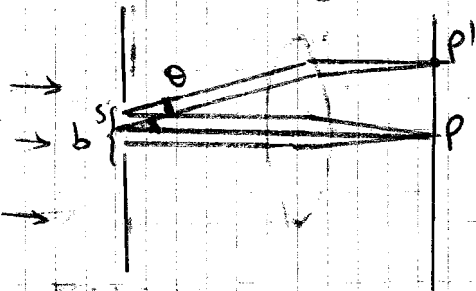
Dispositivo sperimentale x ottenere la figura di diffrazione di una figura

\Rightarrow DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER

Ogni elemento Δr della fenditura diventa sorgente di onde secondarie.

\downarrow
Sono sorgenti mutualmente coerenti.

Le onde secondarie percorrono cammini diversi and arrivano sullo schermo \Rightarrow figure di diffrazione



Tutti i raggi \neq bisogna farti convergere in un unico punto dello schermo

Si dimostra che dalla lente in poi il cammino ottico è lo stesso

- Considero un raggio inclinato di θ che parte da O
 $dE_{\theta} \propto ds$ (\Rightarrow porzione di fronte d'onda)
 $\propto \frac{1}{r}$
 $\propto \cos(\omega t - kr)$

$$dE_{\theta} = \frac{\alpha}{r} ds \cos(\omega t - kr) g(\theta) \quad \alpha \Rightarrow \text{cost prop}$$

- Non considero l'obliquità $\times r$ po θ picc: infatti all'aumentare di θ cessa la mutua coerenza che comporta $\Delta \varphi \neq 0$ $g(\theta)$
 (vedi exp young), oltre ad una diminuz di I
 Per qst sullo schermo si vedono frange solo al centro

- Considero un raggio // che parte da S

$$dE_{s+} = \frac{\alpha ds}{r} \cos[\omega t - k(r-u-s)] \quad \Rightarrow \text{approx: suppongo che l'ampiezza per i 2 segnali siano =}$$

- Infatti il mio fenomeno dipende dalle fasi, non dalle ampiezze
 (L'ampiezza è legata a k varia la fase $\propto \theta$)

- Analogamente considero il punto simmetrico

$$dE_{s-} = \frac{\alpha ds}{r} \cos[\omega t - k(r+u-s)]$$

- Somma i 2 contributi

$$dE_s = dE_{s+} + dE_{s-} = \frac{\alpha ds}{r} [\cos(\omega t - kr + krs \sin \theta) + \cos(\omega t - kr - krs \sin \theta)]$$

$$E = \int_0^{b/2} dE_s = 2 \frac{\alpha ds}{r} \int_0^{b/2} \cos(\omega t - kr) \cos(krs \sin \theta) ds$$

$$= 2 \frac{\alpha ds}{r} \cos(\omega t - kr) \cdot \int_0^{b/2} \cos(krs \sin \theta) ds$$

$$= 2 \frac{\alpha ds}{r} \cos(\omega t - kr) \cdot \frac{1}{k \sin \theta} \sin(k \frac{b}{2} \sin \theta)$$

Pongo $\beta = k \frac{b}{2} \sin \theta$

$$E(p) = \frac{\alpha b}{r} \cos(\omega t - kr) \frac{\sin \beta}{\beta}$$

\Rightarrow Onde monocromatiche con stesso ω da onde incoerenti

termine di diffrazione che modula l'ampiezza

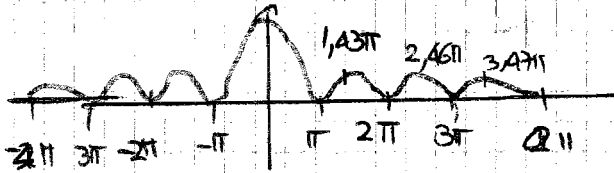
Valor medio dell'intensità

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

Massimo per $\beta \rightarrow 0$ $I = I_0$

Ho dei valori nulli per $\beta = \pm k\pi$ con $k \neq 0$

Ho dei massimi circa $\alpha = \beta \approx \pm (n + \frac{1}{2})\pi$ (in realtà sono sposti)



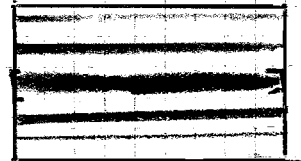
fu decresce i max sono spostati verso il centro

Primo max

$$I = \frac{I_0}{21,2}$$

$$I = \frac{I_0}{121}$$

$$I = \frac{I_0}{41,9}$$



(se differenziale $I' = 0 \Leftrightarrow \beta = \tan \beta$)

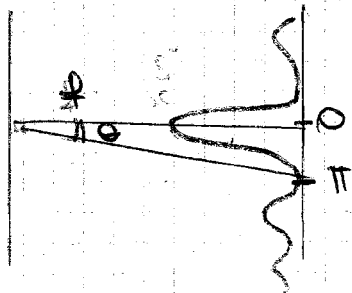
Da cosa dipende l'ampiezza del massimo principale?

$$\frac{k b \sin \theta}{2} = \pi$$

1° zero

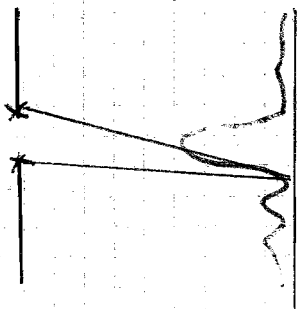
$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \theta = \pi$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b} \Rightarrow \theta \approx \frac{\lambda}{b}$$



$$x = f \tan \theta \approx f \theta = f \frac{\lambda}{b} \quad (f = \text{DISTANZA})$$

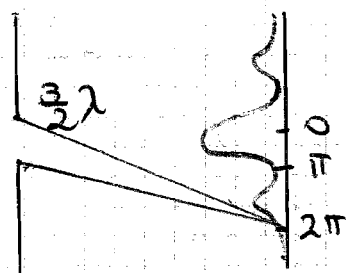
Con + è stretto la fenditura, con + è maggiore l'ampiezza del massimo centrale



La diff di cammino fra qst 2 elementi è $\frac{\lambda}{2}$:

Tutti gli elementini ne hanno uno in opposit di fase

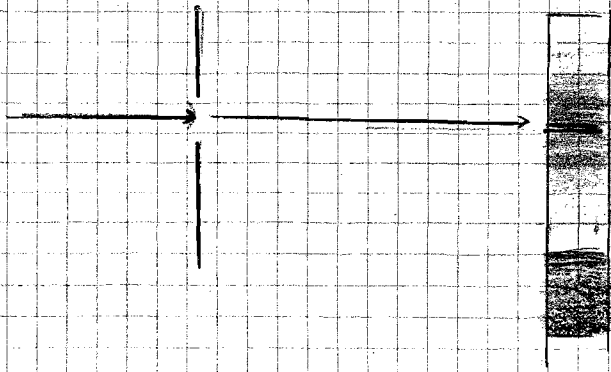
x qst la risultante è 0



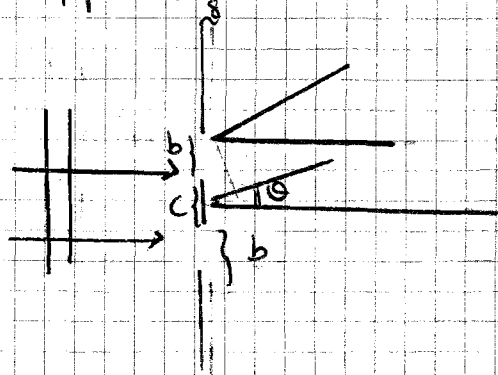
$$\frac{\lambda}{b} = \sin \theta$$

La figura di diffra è una "d'interferent" data da elementini dello stesso fronte d'onda

• Se invece che luce monocromatica usassi luce bianca, sullo schermo vedrei



Doppio fenditura



I raggi + alla fenditura
sono focalizzati dalla lente
nel centro dello schermo

$$\delta = d \sin \theta$$

$$dE_0 = \frac{\lambda ds}{r} \cos(\omega t - kr)$$

$$dE_s^+ = \frac{\lambda ds}{r} \cos(\omega t - k(r - \delta))$$

$$dE_s^- = \frac{\lambda ds}{r} \cos(\omega t - k(r + \delta))$$

$$dE_s = \frac{\lambda ds}{r} \left[\cos(\omega t - k(r - \delta)) + \cos(\omega t - k(r + \delta)) \right]$$

$$E(P) = \frac{2\lambda}{r} \int_{\frac{d-b}{2}}^{\frac{d+b}{2}} \cos(\omega t - kr) \cos(k s \sin \theta) ds$$

$$= \frac{2\lambda}{r} \cos(\omega t - kr) \frac{1}{k \sin \theta} \left[\sin\left(k \left(\frac{d+b}{2}\right) \sin \theta\right) - \sin\left(k \left(\frac{d-b}{2}\right) \sin \theta\right) \right]$$

$$= \frac{4\lambda}{r} \cos(\omega t - kr) \frac{1}{k \sin \theta} \sin\left(k \frac{b}{2} \sin \theta\right) \cos\left(k \frac{d}{2} \sin \theta\right)$$

Poniamo $\beta = k \frac{b}{2} \sin \theta$

$\gamma = k \frac{d}{2} \sin \theta$

$$E(P) = \frac{2ab}{r} \cos(\omega t - kr) \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma$$

$$I = 4I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2 \gamma \quad \text{INTERFERENZA}$$

Ho un sistema di frangere di interferenza ~~condizionato dalla diffrazione~~

\Rightarrow Per qst varia la loro luminosità

Massimi: & minimi

$\beta = 0$ max

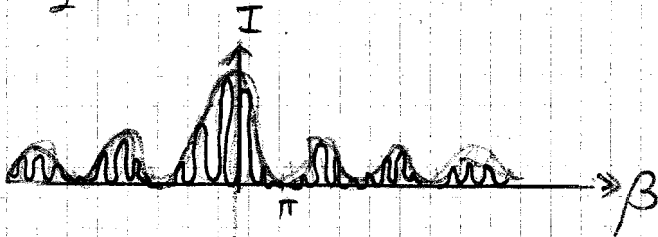
$\beta = \pm n\pi$ minimi

$\gamma = \pm k\pi$ max

$\gamma = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ minimi

} DIFFRACTIONE

} INTERFERENZA



Massimi di INTERF.
moderati sono
DIFFRAZIONE

Parti di fronte obucate partono dalle 2 fenditure e danno luogo all'interferenza. Ma le loro ampiezze diminuiscono x la diffrazione

β e γ non sono indip

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{d}{b}$$

Quanti massimi di interferenza ci sono in un max di diffrazione

Considero $\beta = \pi$

$$k \frac{b}{2} \sin \theta = \pi$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b}$$

Cosa succede per qst θ all'interf?

$$\gamma = m\pi$$

$$k \frac{d}{2} \sin \theta = m\pi$$

$$m = \frac{d}{b}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2} \sin \theta = m\pi$$

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$$

$$m = 2 \cdot \frac{d}{b} - 1$$

ader sedd=3b
nel primo ho 5 max, a macchia x
stanno sullo 0,



Per d grande e b piccolo simulò un vero exp di Young:
ho tant max tutt i della stessa ampiezza.

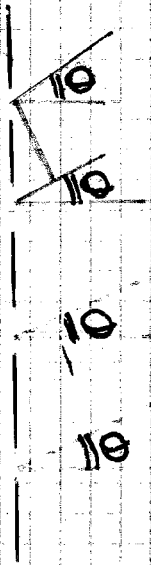
N fenditure : reticolo di diffrazione

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2 \gamma}$$

• Aumentando I , va come N^2 : massimi + luminosi
e stretti
separati bene da diversi λ

lim $\gamma \rightarrow 0$ $I = N^2 I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$

L'INTENSITÀ DEI MAX ^{D'INTERF} È PROPORZIONALE
AL QUADRATO DEL N° DELLE FENDITURE

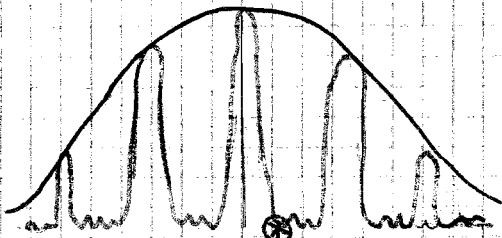


spazi = $d \sin \theta$

OGNUNA HA UNA DIFF DI CAMMINO λ
 $d \sin \theta = n \lambda$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \pm 2n\pi \Rightarrow d \sin \theta = n \lambda$$

• Dentro un max di diffra



• MASSIMI D'INTERFERENZA INTERVALLATI
DA MASSIMI SECONDARI PICCOLI
E DA DEGLI ZERI.

PERCHÈ C'È LO 0 TRA IL 1° MAX
PRINCIPALE E IL SECONDARIO?

• L'INTENSITÀ È ZERO QND $d \sin \theta = \pm \lambda / N \Rightarrow d \sin \theta = \frac{\lambda}{N}$

• LA LORO DIFF DI FASE NEL PUNTO DI INTERF È $\frac{2\pi}{N}$. SE DISEGNO
N VETTORI INCLINATI $\frac{2\pi}{N}$ OTTIENGO UN POLIGONO REGOLARE
CHIUSO

⇒ RISULTANTE: NULLA

$$d \sin \theta = \frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \frac{3\lambda}{N}, \dots, \frac{(N-1)\lambda}{N} \Rightarrow \text{CONDIZ PER OVERLAP ZERI}$$

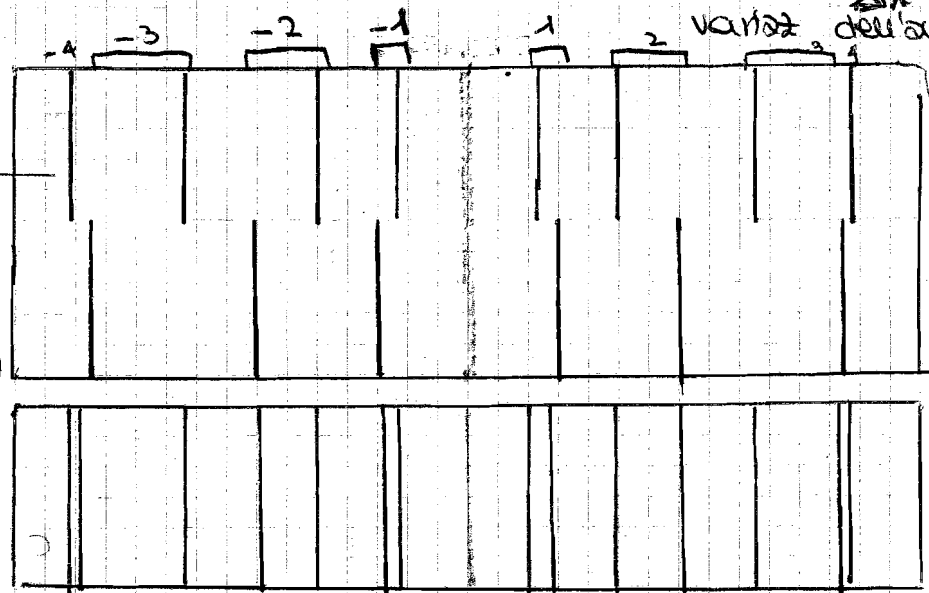
FRATTORE 2 MAX PRINCIPALI HO $\frac{N-1}{N-2}$ ZERI
MAX SECONDARI

• Il max si ha per $d \sin \theta = n \lambda$
gli altri zeri o max secondari si ottengono aggiungendo $\frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \dots$

LUCE FATTA DA 2 LUNGHEZZE D'ONDA: DISPERSIONE ANGOLARE
Rapporto $\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$ che lega la variaz dell'angolo con gli di λ .

C'È QUASI UNA SQUADRA POSIZIONE DEGLI ORDINI

(ES: $m=3$ ROSSO
 4 VERDE
 5 VIOLETTO)



→ Aumenta del numero dell'ordine

→ LA DISPERSIONE LINEARE (Distanza tra Max dello stesso ordine di colori) = AUMENTA DI CRESCE DELL'ORDINE m , λ

• Massimi dello stesso ordine corrispondenti a 2 diverse lunghezze d'onda λ , $\lambda + \Delta\lambda$

Max di ordine n per λ $\sin\theta = \frac{n\lambda}{d}$

Per $\lambda + \Delta\lambda$ $\sin(\theta + \Delta\theta) = \frac{n(\lambda + \Delta\lambda)}{d}$

$$\sin\theta \cos\Delta\theta + \sin\Delta\theta \cos\theta = \frac{n\lambda}{d} + \frac{n\Delta\lambda}{d}$$

• Consideriamo piccoli spostamenti angolari $\cos\Delta\theta \approx 1$ $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$

$$\sin\theta + \Delta\theta \cos\theta = \frac{n\lambda}{d} + \frac{n\Delta\lambda}{d}$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{n}{d \cos\theta}$$

d = passo del reticolo

• (La dispersione lineare) è la disp angolare • fuoco focale, corrisp alla dist misurato dallo schermo,

Se io scelgo incidenza normale $\cos\theta = 1$, mentre per un'incidenza radente l'aumento la dispersione angolare.

Fissato d ed n , misuriamo θ e possiamo ricavare λ .

Se utilizzato uno strumento ottico per osservare sorgenti puntiformi ho sempre figure di diffrazione, non ho figure nette.

Non vedo dei puntini, vedo dei sistemi di frange circolari.

→ POTERE RISOLUTIVO

Capacità di risolvere img distinte di oggetti vicini

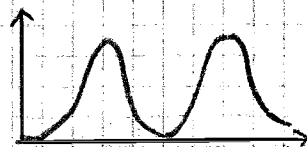


riducendo l'oculare
= aumento la diffra

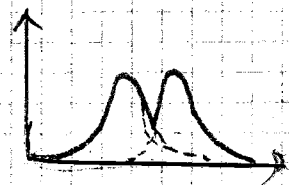
Riducendo le frange di diffra la dim dell'apertura dell'oculare sono + evidenti

• Per λ minore (Bw), maggiore è il potere risolutivo.

• Qual'è la minima differenza di λ che posso apprezzare col mio strumento?



RISOLTE



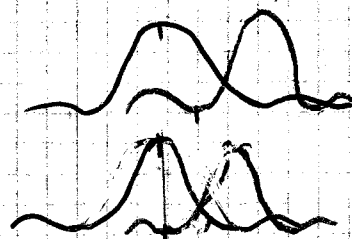
PARZIALMENTE RISOLTE



SOPRAPPORTE

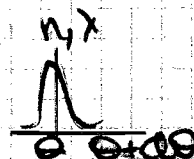
• Se non ho un'incertezza nella posiz., ho un'indeterminata nella misura di λ

⇒ CRITERIO DI RAYLEIGH: 2 frange possono considerarsi risolte al limite quando il massimo centrale di una delle figure di diffraz coincide col 1° minimo dell'altra



RISOLTE

⇒ COSO LIMITE



• Per quale angolo si ha lo zero?

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$$

$$\sin(\theta + \delta\theta) = n \frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{d \cdot N}$$

$$\sin \theta \cos \delta\theta + \cos \theta \sin \delta\theta = n \frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{d \cdot N}$$

$$\cos \delta\theta \approx 1 \quad \sin \delta\theta \approx \delta\theta$$

$$\delta\theta \cos \theta = \frac{\lambda}{d \cdot N}$$

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{\cos \theta \cdot d \cdot N}$$

$$\Delta\theta = \frac{n \Delta\lambda}{d \cos \theta}$$

} lo squaglio per il princ di Rayleigh

$$\frac{\lambda}{d \cdot N \cos \theta} = \frac{n \Delta\lambda}{d \cos \theta}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n \cdot N$$

POTERE RISOLUTIVO!

↓
All'aumentare di N
aumenta il potere risolitivo

• RITENDICUSE 1785 fa il 1° reticolo di diffraz con 50 capelli, spazio 100 capelli per 2.54 cm

Stessa tecnica del reticolo di Fraunhofer

• FRAUNHOFER inventa lo spettrometro e scopre oltre 500 linee nere di assorbimento nello spettro del sole

↓
RICHIOFF E BURNSEN spiegano il fenomeno dell'assorbimento

• Col reticolo misuro diverse λ e studio gli spettri di stelle, come dirò

• ROWLAND (1882) \Rightarrow RETICOLO A TRASMISSIONE

Incisioni fatte da punte di diamante su una lastra di vetro

$$d \approx 1,68 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

$$l = 15 \text{ cm}$$

586 Å scelti per cui

$$\text{per } \lambda = 5000 \text{ Å}$$

$$\Delta\lambda = 0,0586 \text{ Å}$$

$$\text{con } f = 300 \text{ cm}$$

$$\Delta\theta \cdot f = 0,01 \text{ mm} \quad \text{POTERE DISPERSIVO}$$

\Rightarrow È il padre dei moderni reticoli

DISPERSIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

In generale $n = n(\lambda)$ \rightarrow DISPERSIONE

onde con $\lambda \neq$ seguono percorsi diversi.

Si ha inoltre il fenomeno dell'assorbimento e della diffusione

Conferisce al cielo il colore azzurro.
Studiato da Rayleigh.
va come $\frac{1}{\lambda^4}$

La luce violetta viene diffusa e noi vediamo il cielo azzurro

L'onda e.m. quando interagisce con delle particelle, (es. at.), le mette in oscillazione

Particelle cariche oscillanti emettono onde e.m. con stesso freq. del fronte principale, ma fase diversa.

I fronti d'onda derivanti dall'interferenza tra fronte primario e secondario hanno velocità di fase $\frac{c}{n}$, minore a qll della luce nel vuoto.

Le bottiglie verdi assorbono la parte rossa e violetta, emettendo giallo e blu.

Una lastra di rame è gialla x.c. assorbe tutti i colori tranne il giallo che viene riflesso.

In generale per il visibile $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ con a, b dipendenti dal materiale

In generale n diminuisce al crescere di λ (diminuire di λ)

La sua derivata (derivata) è maggiore per λ piccola

Equazione di Cauchy

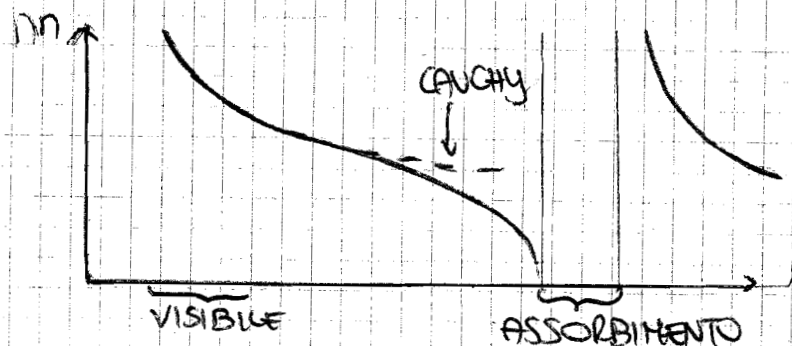
$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \left(+ \frac{C}{\lambda^4} \right)$$

SVILUPPO IN SERIE

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$$

In alcuni casi non è più utilizzabile

DISPERSIONE anomala nell'infrarosso del quarzo



Cadde molto + rapidamente di qll prevista.

Dopo l'assorbimento segue una curva di Cauchy con $A, B \neq$

Quasi tutti i materiali hanno bande di assorbimento, non è anomalo!

Sono centrate attorno a una particolare λ , di solito non nel visibile (vapor iodio, fluoresceine)

All'interno della banda si può avere dispersione

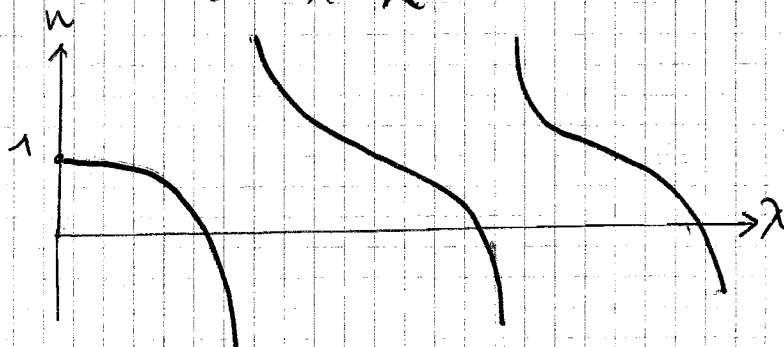
EQUAZIONE DI SELLMIEER

$$n^2 = 1 + \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

Qnd l'onda incidente ha ~~freq~~ simile a qll prop del sistema ($\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$) si ha l'assorbimento!

Se ha diverse bande, es n

$$n^2 = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{A_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}$$



CURVA DI DISPERSIONE

→ Non è possibile che una grandezza fisica (n) vada a ∞

• L'eq di Sellmeier è + precisa di Cauchy, ma comunque non spiega e non descrive il comportamento nelle bande

• L'elettrone ha un'oscillaz con frequenza ω_0 , per viene colpito da un'onda e.m. e viene sottoposto alla forza $F = qE$

Oscillazione forzata con freq ω

• La posiz dell'e rispetto al nucleo varia nel tempo, (sia in modulo che in direzione) ha dunque un dipolo $p = e\delta$ variabile.

• Tanto più ω è simile a ω_0 , con più energia l'elettrone è in grado di assorbire energia dal fascio incidente

(Per approx immagina il nucleo fermo x la sua massa $\gg m_e$)
→ OSCILLATORE ELETTRONICO

Se avessi uno ione positivo e uno negativo avrei 2 oscillaz rispetto ad un cm, l'oscillatore movocabile, con qll elettronico, ha elongaz maggiore se le parti oscillano con la loro frequenza propria ω_0
→ per int se $\omega \approx \omega_0$ si ha un assorbimento maggiore

• Gli oscillatori elettronici (siccome gli e sono leggeri) hanno ω_0 + alta, nell'ultravioletto.

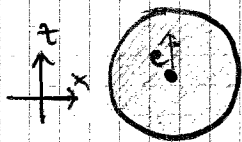
Quelli molecolari, più massivi, hanno ω_0 più basso, di solito nell'infrarosso.

È raro che la banda di assorbimento stia nel visibile (\times qst ci si accorge dopo della loro presenza nella curva di dispersione)

DISPERSIONE ELETTROMAGNETICA

• Consideriamo un oscillatore elettronico con carica -e e massa m_e .

• Distribuzione uniforme di cariche positive +e, raggio $a \approx 9.5/4 \text{ \AA}$, al centro del quale si trova e-

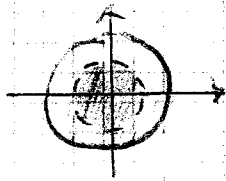


Compio un lavoro: sposto e lungo z, se la forza magnetica oscilla.

Forza elastica

In assenza di fenomeni dissipativi l'oscillazione è perpetua
 $m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz$

Applico il teorema di Gauss



$$\Phi(E) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi z^2 = \frac{4\pi z^3}{3} \cdot \left[\frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3} \right] = \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{a^3}$$

$$F = qE = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{a^3} = -kz$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a^3}$$

La frequenza propria di oscillazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \rightarrow \text{MOTO LIBERO, PROPRIO DELL'ELETTRONE}$$

$$z(t) = z_0 \cos(\omega t) \rightarrow \text{ho usato le condiz. iniziali } z=z_0, \dot{z}=0 \text{ per } t=0$$

All'istante t l'elettrone e la carica positiva formano un dipolo

$$p = -et$$

(il momento $dipolo$ \times la carica)

La posiz. d'equilibrio dell' e^- è il centro della carica positiva, solo spostato inizialmente od oscillare attorno ad esso.

Le oscillazioni terminano a causa di fenomeni dissipativi:

l' e^- è una carica accelerata: emette radiaz. e.m. finché non dissipa l'energia acquistata \times eccitata.

In un gas gli urti fra molecole sono rari \Rightarrow il mezzo d'onda è lungo prima che un altro urto ne modifichi l'oscillazione.

La luce emessa da un gas è monocromatica mentre in un corpo incandescente a su oscillazioni che disturbano il moto, quindi lo spettro è continuo.

L'energia del dipolo decresce \exp $W = W_0 \cdot e^{(-t/\tau)}$

Se lo smorzamento dell'oscillatore fosse dovuto solo all'irraggiamento $\tau \approx 10^{-8}$

Quindi lunghezza treno d'onda $\lambda = c\tau \approx 3m$

Se guardo le righe spettrali del mercurio hanno lunghezza $\Delta\lambda = 0,005 \text{ \AA}$

La riga verde si ha per $\lambda = 5461 \text{ \AA}$

Lunghezza treno d'onda: $0,5 m \rightarrow \tau \approx 3 \cdot 10^{-8} s$

Ci sono altri fenomeni dissipativi: urti (e. termica)

$$v = \frac{c}{\Delta\lambda} = 1092200$$

$$\lambda = N\lambda \approx 0,5 m$$

$$\tau = \ell/c$$

OSCIILLATORE ELETTRONICO IN PRESENZA DI RADIAZIONE ELETTRONICA

- Onda e.m. polarizzata lungo z che si propaga lungo x , incidente su un oscillatore elettronico

Posiz. di riposo = origine

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz - (hc + h\omega) \frac{dz}{dt} - e(E + v \times B)$$

FORZA DI RICORDO

RADIAZIONE EMESSA

COLLISIONI

⇒ CONTRIBUTO DI OTTRITO

LORENTZ

$$v \times B = v \mu_0 H = v \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$$

CONDIZ. DI TRASVERSALITÀ DELL'ONDA

$$v \times B = \frac{v}{c} E$$

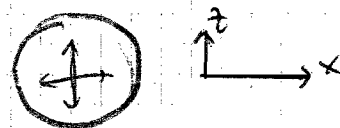
Se l'elettrone non ha una velocità relativistica (di solito $v \sim 10^{-3} c$) posso trascurare qst termine

$$\text{• Prendo } \underline{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

Posso fare un'approx circa l'eq. fase spaziale

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Al massimo $x \sim \lambda \text{ Å}$ (raggio atomico)
 $\lambda \sim 1000 \text{ Å}$



Posso trascurare l'oscillaz. lungo x

$$\underline{E} = E_0 e^{i\omega t}$$

- Ottengo un'eq di 2° grado non omogenea

$$m_e \ddot{z} = -kz - (hc + h\omega) \dot{z} - eE_0 e^{i\omega t}$$

- Cerco una sol. dell'omogenea → comportamento transitorio, si annulla dopo un certo tempo, trascuro

- Cerco una sol. particolare → stato stazionario finale

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

→ VEDO SE FUNGE!

Divido per m_e ($k_{me} = \omega^2$)

$\frac{hc + h\omega}{m_e} = \gamma \rightarrow$ corrisp. al tempo caratteristico del decadimento dell'oscillatore

$$\ddot{z} = -\omega^2 z - \gamma \dot{z} - \frac{eE_0}{m_e} e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 z_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t} - i\omega \gamma z_0 e^{i\omega t} - \frac{eE_0}{m_e} e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 z_0 = -\omega^2 z_0 - i\omega \gamma z_0 - \frac{eE_0}{m_e}$$

$$z_0 = -\frac{eE_0}{m_e} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \omega^2) + i\omega \gamma} = -\frac{eE_0}{m_e} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega^2) - i\omega \gamma}{(\omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

Pongo $z_0 = |z_0| e^{i\theta}$
 $z(t) = z_0 e^{i\omega t} = |z_0| e^{i(\omega t + \theta)}$

Con $|z_0| = \frac{eE_0}{m\epsilon}$ $\frac{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)^{1/2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{eE_0}{m\epsilon} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^{1/2}}$

$\theta = \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Per $\omega < \omega_0$
 $\omega > \omega_0$

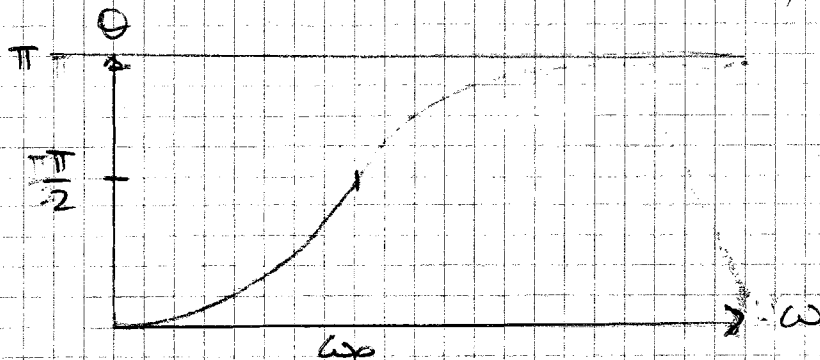
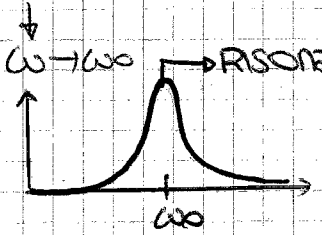
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

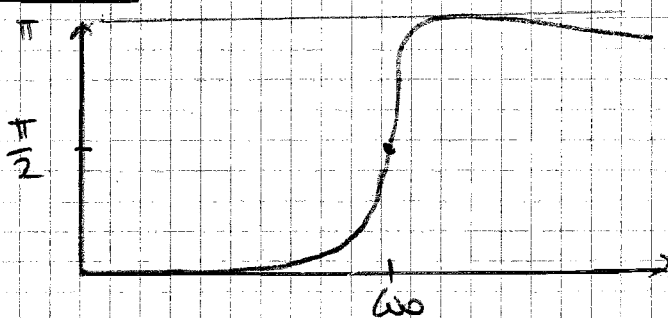
→ per $\omega > \omega_0$ $\theta \rightarrow \pi$

Oscillano sfasati, in opposizione di fase

L'elongazione ha un max. quando $\omega \rightarrow \omega_0$ → RISONANZA
 Al crescere di γ aumenta l'ampiezza



• Se γ è piccolissimo



RIDUCO IL BANDO D'ASSORBIMENTO

• Momento di dipolo dell'elettrone oscillante $p = -ez$

$P = Np = -Nez$
 Polarizzato N° DIPOLO PER UNITÀ DI VOLUME

$\underline{P} = +Ne \underline{z}(t) = \frac{Ne^2 E_0}{m\epsilon} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} e^{i\omega t}$

$\underline{P} = \chi_e \underline{E} = \chi_e E_0 e^{i\omega t}$

COMPO MOLECOLARE, NON SAREBBE ADEGUATO \underline{E} , COMPO MACROSCOPICO

$\underline{E}_m = \underline{E} + \frac{\underline{P}}{3\epsilon_0}$

Assumo che sia trascurabile (di fatto nei gas lo è)

$\chi_e = \frac{Ne^2 E_0}{m\epsilon} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$

$\epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\epsilon} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$

$$n^2 \approx \epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \epsilon} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

oss: se $\gamma=0$
TROVO EQ DI
SEMPRE ER

Scriviamo $n = n_R + i n_I$

$$n^2 = n_R^2 - n_I^2 - 2i n_R n_I$$

$$n_R^2 - n_I^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \epsilon} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \quad \Rightarrow A$$

$$2 n_R n_I = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \epsilon} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \quad \Rightarrow B$$

$$(n_R^2 - n_I^2)^2 = A^2$$

$$n_R^4 + n_I^4 - 2 n_R^2 n_I^2 = A^2$$

$$4 n_R^2 n_I^2 = B^2$$

$$n_R^2 + n_I^4 + 2 n_I^2 = A^2 + B^2$$

$$\begin{cases} n_R^2 + n_I^2 = \sqrt{A^2 + B^2} \\ n_R^2 - n_I^2 = A \end{cases}$$

$$n_R^2 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}$$

$$n_R = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[A + \sqrt{A^2 + B^2} \right]^{1/2}$$

HIO 2 SOL \Rightarrow ONDA INCIDENTE
(+/-) E ONDA RIFLESSA

$$n_I = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-A + \sqrt{A^2 + B^2} \right]^{1/2}$$

Il campo elettrico si scrive nella forma

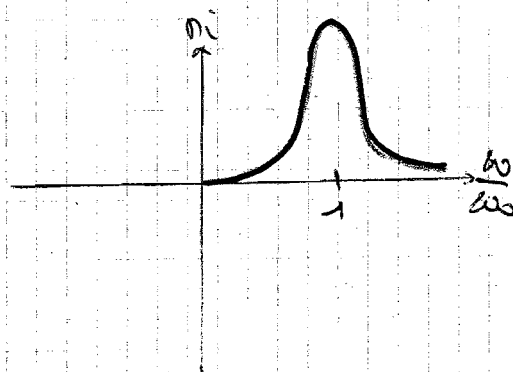
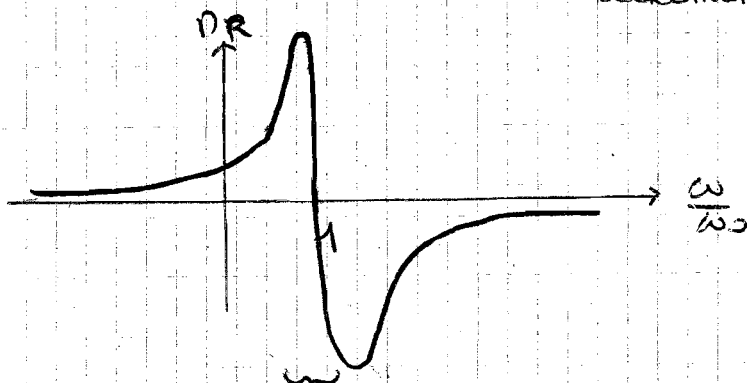
$$E = E_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n x)} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 n x)}$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - k_0 n x)} e^{-n k_0 x}$$

DA INCIDENTE
SUL PRISMA
(velocità di fase)

TERMINE D'ATTENUAZIONE, $n \propto$ COEFF
DI ASSORBIMENTO

↓
DECREMENTO DELL'AMPIEZZA



SE TRASCURO γ QUI HO UN
ASINTOTO VERTICALE

Posso scrivere

$$n(\lambda)$$

$$v = c/\lambda$$

$$v_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

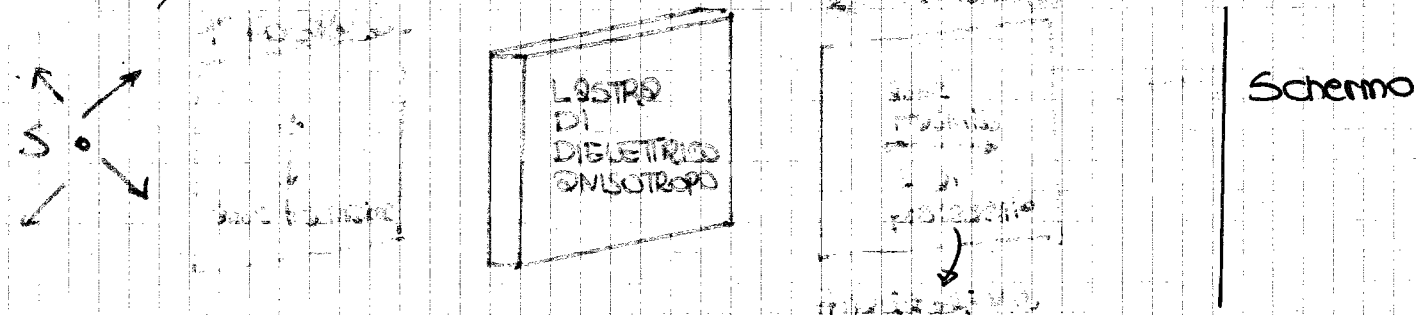
$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{1}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}$$

$$n^2 = 1 + \frac{A\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} \quad (\text{SUMMATION})$$

ANISOTROPIA

• Considereremo solo aspetti legati al campo elettrico, assumendo

$\mu = \mu_0$ costante



• Assi di trasmissione \perp : Filtri incrociati, vedo buio.

• Nel mezzo metto una lamina di materiale anisotropo: non ho + buio sullo schermo.

• Girando l'analizzatore vedo 2 max e 2 minimi: polarizzata ellittica

Qnd la direz $\vec{e} \parallel$ all'asse maggiore c'è max, \parallel all'asse minore è minimo.

• Se ruoto il materiale anisotropo ho 4 posiz distanziate di 90° in cui vedo buio

→ In qst 4 posiz della lamina, non cambia la polarizzazione della luce che rimane \perp all'asse dell'analizzatore.

Lungo qst 2 direz la luce non è polarizzata ellitticamente



• Immagino di avere 2 onde polarizzate lungo i 2 assi che dunque non si modificano.

Prendo un'onda con \vec{P} qualsiasi, la scompago lungo i 2 assi, una ond escano dal materiale avendo viaggiato con velocità diverse hanno uno sfasamento: 2 onde con direz \perp e sfasate danno luogo ad una polarizzazione ellittica

Per qst pur conservandoli le componenti, \vec{P} cambia.

Nel mezzo vale $v = \frac{c}{n} \rightarrow$ Lungo le 2 direzioni la luce vede 2 indici di rifrazione diversi

• Esiste un piano \perp alla direz di propagazione sul quale prendo 2 onde che vibrano \perp fra loro che vedono 2 indici di rifrazione \neq

In un mezzo otticamente anisotropo per ogni direz di propagazione \vec{k} solo 2 onde vibrano in 2 piani \perp e \perp alla direz di propagazione che mantengono il loro stato di polarizzazione mentre viaggiano attraverso il mezzo.

Le velocità di propagazione delle onde lungo qst 2 direzioni è diversa:

• Le velocità di propagazione dipendono dalla DIREZIONE DI VIBRAZIONE, non dalla DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

Onda che propaga lungo x
 polarizzata lungo z
 polarizzata lungo y
 $\begin{pmatrix} n_y \\ n_x \end{pmatrix}_x$

E analogamente $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}_z$ $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}_y$

Quindi posso avere un'onda che propaga lungo x e lungo y
 che vedo lo stesso n_z

Assumo $\mu_r \approx 1$

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad \underline{P} = \chi_e \underline{E}$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = (\epsilon_0 + \chi_e) \underline{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 + \chi_e$$

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\chi_e}{\epsilon_0}$$

Per i mezzi anisotropi χ_e è un tensore simmetrico

$$\underline{P} = \underline{\chi_e} \underline{E}$$

$$\underline{\chi_e} = \begin{bmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} & \chi_{e13} \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} & \chi_{e23} \\ \chi_{e31} & \chi_{e32} & \chi_{e33} \end{bmatrix} \quad \chi_{eij} = \chi_{eji}$$

Posso scegliere una terna e diagonalizzare

$$\underline{\chi_e} = \begin{bmatrix} \chi_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{e3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \underline{\chi_e} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_x = \chi_{e11} E_x + \chi_{e12} E_y + \chi_{e13} E_z \\ P_y = \chi_{e21} E_x + \chi_{e22} E_y + \chi_{e23} E_z \\ P_z = \chi_{e31} E_x + \chi_{e32} E_y + \chi_{e33} E_z \end{cases}$$

\underline{P} non è più parallelo ad \underline{E}

Nei mezzi anisotropi \underline{D} ed \underline{H} sono \perp alla direz di propag \underline{E}
 (come negli isotropi) \underline{E} non necessariamente \perp
 può avere componente // direz di propagazione

Scompago lungo la terna che diagonalizza \underline{E}

$$\begin{cases} P_x = \chi_{e1} E_x \\ P_y = \chi_{e2} E_y \\ P_z = \chi_{e3} E_z \end{cases}$$

→ un materiale è isotropo se $\underline{P} \parallel \underline{E}$
 $\chi_{e1} = \chi_{e2} = \chi_{e3}$

Ci sono ang nei materiali anisotropi 3 direz
 lungo le quali $\underline{D} \parallel \underline{E} \parallel \underline{B}$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \cdot \underline{\epsilon_r} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$\underline{\epsilon_r}$ è un tensore simmetrico,
 diagonalizzabile

↓
 COSTANTI DIELETTRICHE
 PRINCIPALI lungo i 3
 assi principali

Dunque si ha

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$$

$$n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$$

$$n_3 = \sqrt{\epsilon_3}$$

A seconda della direz
dove vibra il campo
ho 3 indici di rifratt

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}$$

Il mezzo è isotropo se n è lo stesso in tutte le
direzioni $n_1 = n_2 = n_3 \Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$

ELLISSOIDE DEGLI INDICI DI RIREFR

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1$$

(È una sfera se il materiale è omogeneo)

Ho 3 semiassi: n_1, n_2, n_3

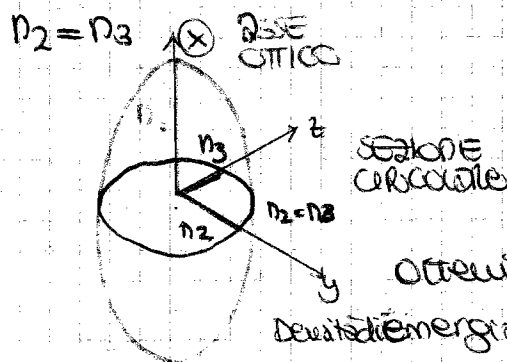
- Considereremo solo il caso $n_1 = n_2 = n_3 \rightarrow$ qst particolari mezzi si chiamano UNIASSIA, gli altri ove $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ sono BIASSIA
- la polarizz è dovuta al fatto che applicando un \vec{E} provoca una separazione di cariche.

Oscillatore elettronico:

$$m \ddot{z} = -kz - (he + h\pi) \dot{z} - eE$$

Disposto elasticamente differente a seconda
della direz di \vec{E} : qst è dovuto
all'anisotropia

In un mezzo anisotropo la diversa rigidezza degli oscillatori dipende
dall'orientazione.



- I semiassi dell'ellissoide coincidono con la
terna di assi principali.

Otteniamo l'ellissoide dalle eq. di Maxwell.
Densità di energia

$$W = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \underline{D} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot (\underline{\epsilon} \vec{E})$$

- Scelgo la terna per la quale \vec{E} è un versore

$$W = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \cdot \epsilon_0 (\epsilon_1 \hat{u}_1 + \epsilon_2 \hat{u}_2 + \epsilon_3 \hat{u}_3) \\ = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2 E_2^2 + \epsilon_3 E_3^2)$$

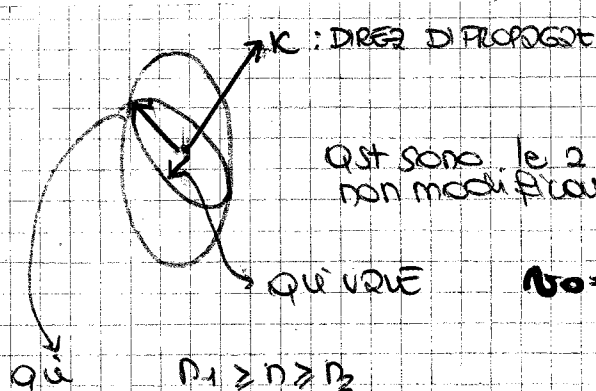
- Fissato W è l'eq di un ellissoide.

$$W = \frac{1}{2} \underline{D} \cdot \underline{\epsilon}^{-1} \cdot \underline{D}$$

Se avessi svolto qst conto avrei trovato

$$\frac{D_1^2}{n_1^2} + \frac{D_2^2}{n_2^2} + \frac{D_3^2}{n_3^2} = 1$$

• Pendo una direz di propagazione \vec{k} nel materiale e un piano \perp a \vec{k}
che interseca l'ellissoide



QST sono le 2 direzioni lungo le quali la onda non modifica il suo p

$$v_0 = \frac{c}{n_2} = \frac{c}{n_3}$$

ONDA ORDINARIA (la velocità cambia mai) $\Rightarrow \textcircled{a}$

L'ONDA CHE VIAGGIA IN QST DIREZ VEDE SEMPRE n_2 (come materiale isotropo)

$$n_1 \geq n \geq n_2$$

$$\frac{c}{n_1} \leq v \leq \frac{c}{n_2}$$

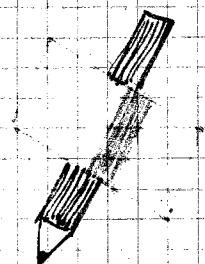
ONDA STRAORDINARIA $\Rightarrow \textcircled{e}$

$$\frac{1}{n_e(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

$n_o = n_2$ $n_e = n_1$

L'ONDA CHE VIAGGIA IN QST DIREZ VEDE UN INDICE DI RIREF. $n_1 > n_2 > n_2$ DIPENDE DALLA DIREZ DI PROPAGAZ.

Si chiamano CRISTALLI BIRIFRANGENTI



$n_1 > n_2$ UNIASSICO POSITIVO

$n_2 > n_1$ UNIASSICO NEGATIVO

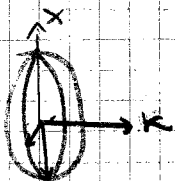
L'asse x è l'asse ottico, il piano contenente l'asse ottico e k si chiama SEZIONE PRINCIPALE \rightarrow qui vibra l'onda straordinaria, e se dipende da k \rightarrow vibra l'onda ordinaria

• Se $\hat{k} \parallel \hat{x}$ \rightarrow le 2 onde viaggiano con la stessa velocità \rightarrow materiale isotropo



La sezione normale all'asse di un ellissoide di Fresnel è un cerchio di raggio n_2 . Tutte le onde piane che viaggiano nella direzione dell'asse ottico conservano il loro stato di polarizzazione.

• Se $\hat{k} \perp \hat{x}$ \rightarrow Se il cristallo è positivo (o negativo) l'onda straordinaria vede n_1 e ha velocità minimo (o max)



• Nel 1° caso $\Delta l = \frac{c}{n_2} \Delta t \Rightarrow$ NO SFASO

• Nel 2° caso l'onda straordinaria compie un tragitto minore

$$\Delta l_o = \frac{c}{n_2} \Delta t$$

$$\Delta l_s = \frac{c}{n_1} \Delta t$$

(se $n_1 > n_2$)

maggiore se il cristallo è positivo

• Studiamo la propagazione della luce in mezzi birifrangenti trascurando la diffusione

• Determiniamo la forma del fronte d'onda corrispondente ad una sorgente puntiforme in un mezzo birifrangente.

→ Superficie i cui punti sono simultaneamente raggiunti da un'onda luminosa emessa da un dato istante dalla sorgente puntiforme

• In un mezzo isotropo la velocità di propagazione è costante in tutte le direzioni, dunque il fronte d'onda è sferico, mentre in un mezzo anisotropo assume forme più complesse perché la velocità dipende dalla direzionalità.

• Nel caso di mezzo birifrangente sarà una superficie doppia perché per ogni direzionalità κ vi sono 2 possibili velocità di propagazione, corrispondenti all'onda ordinaria e all'onda straordinaria.

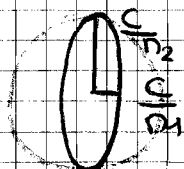
• Analizziamo il caso dei cristalli uniassici:

- L'onda ordinaria, indipendentemente da κ vede sempre n_2 e quindi la stessa velocità \Rightarrow FRONTE D'ONDA SFERICO

- L'onda straordinaria vede la velocità variare \Rightarrow FRONTE D'ONDA ELLISSOIDALE

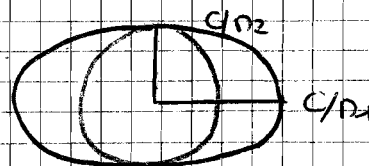
Se $n_1 > n_2$

cristallo
positivo



Se $n_2 > n_1$

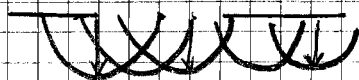
cristallo
negativo



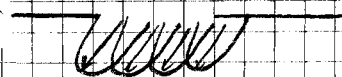
Dunque il fronte d'onda che si sviluppa da una sorgente puntiforme in un cristallo uniassico consiste in una sfera e in un ellissoide di rotazione intorno all'asse ottico. Queste 2 superfici sono tangenti nei punti di intersezione con l'asse ottico.

• Consideriamo un'onda che si propaga in un cristallo uniassico: la direzionalità di propagazione è normale al piano dell'onda.

• Poniamo // al suo piano uno schermo opaco con una grande apertura; per il principio di Huygens tutti i punti dell'apertura diventano sorgenti d'onde secondarie.



• Nel caso dell'onda ordinaria, le onde secondarie sono sferiche e la direzionalità dei raggi è normale al fronte d'onda. Quindi l'onda ordinaria e il corrispondente raggio ordinario viaggiano nella stessa direzionalità, come nei mezzi isotropi.



• Nell'onda straordinaria le onde secondarie sono ellissoidali e la direzionalità di propagazione dell'onda forma un angolo θ con l'onda.

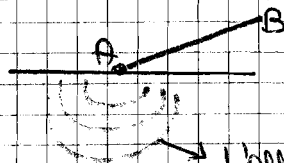
• La rifrazione del raggio straordinario segue una legge di Snell diversa da quella del raggio ordinario.

• Di norma raggio incidente, riflesso e trasmesso non giacciono nello stesso piano.

Raggio incidente, riflesso e trasmesso giacciono nello stesso piano solo in 2 casi:

- ASSE OTTICO // AL PIANO D'INCIDENZA
- ASSE OTTICO \perp AL PIANO D'INCIDENZA

Asse ottico \perp al foglio: n_e e n_o giacciono nello stesso piano



A sorgente d'onde secondarie

L'ellissoide ha asse maggiore \perp al foglio, dunque sezionando con piani // al foglio vedo dei cerchi.

• Assumiamo

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E}$$

per un materiale omogeneo trasparente
($\mu_r = 1$)

MATERIALE \downarrow ANISOTROPO, $\underline{\underline{\epsilon}}$ DIAGONALIZZATO

• Non ci sono densità di cariche libere e correnti di conduzione:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{NEUMANN - FARADAY - LENTZ})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (\text{NON CI SONO CARICHE LIBERE})$$

• Cerco sol. monocromatiche di onda piana polarizzate linearmente

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\omega \text{ PULS. } \omega = 2\pi \nu$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

\vec{k} VETTORE DI PROPAGAZ.
DELL'ONDA

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

• Sostituendo nelle eq di Maxwell

$$\vec{k} \wedge \vec{B}_0 = -\mu_0 \omega \vec{D}_0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0$$

Donque

$$\vec{k} \perp \vec{B} // \vec{H}$$

$$\vec{k} \perp \vec{D}$$

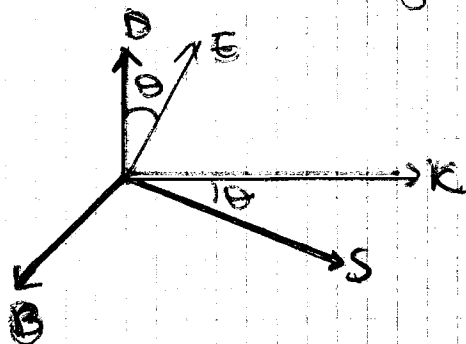
Giacciono nel
piano dell'onda
($\vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$)

• Dalla prima rel si deduce che $\vec{k}, \vec{D}, \vec{B}$ sono tra loro
e formano una terna destrorsa

come in un mezzo isotropo

• Siccome $\vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E}$ in generale \vec{D} ed \vec{E} non sono //, dunque
 $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ non \equiv formano una terna destrorsa

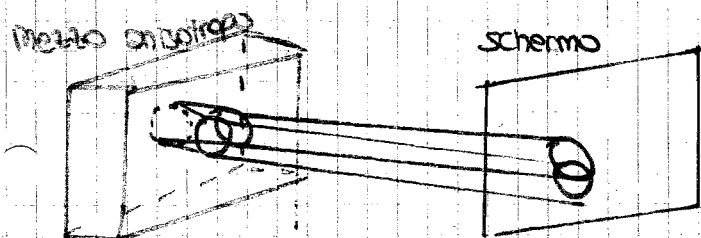
• Ma per la 2 rel \vec{B} deve essere \perp a \vec{k} ed \vec{E}
 $\Rightarrow \vec{E}$ deve trovarsi nel piano formato da \vec{k} e \vec{D} formando
con \vec{D} un angolo θ



Il vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
 $= \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

che rapp. la direz. di propagaz.
dell'energia associata al vettore,
forma \hat{k} anche lei un angolo
con \hat{k}

Un'onda entra in un mezzo e si divide in ordinaria e straordinaria



Materiali unassici

$$n_1 = n_e$$

$$n_2 = n_3 = n_o$$

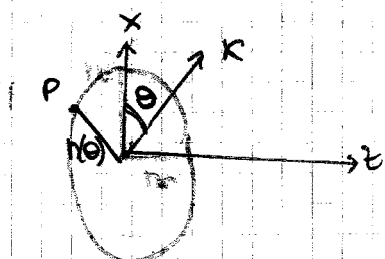
Un'onda ordinaria ha $\vec{s} \parallel \hat{k}$,
quell'straordinaria no.

Per questo la BIREFRINGENZA

AD UN FASCIO // DI LUCE NATURALE INCIDENTE
SU UNA SUP. PIANO DI UN CRISTALLO CORRISPONDONO
2 FASCI RIFRAITI LINEARI POLARIZZATI DI LUCE
VIAGGIANTI IN DIREZ. + DEL CRISTALLO

$$\frac{x^2}{n_e^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

• Piano xz



Il valore dell'indice di rifr. $n(\theta)$
è pari alla lunghezza d'OP

$$\frac{x^2}{n_e^2} + \frac{z^2}{n_o^2} = 1$$

$$x = OP \sin \theta$$

$$z = OP \cos \theta$$

$$\frac{OP^2 \sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{OP^2 \cos^2 \theta}{n_o^2} = 1$$

$$OP = n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}}}$$

Per $\theta = 0$

$$n(\theta) = n_o$$

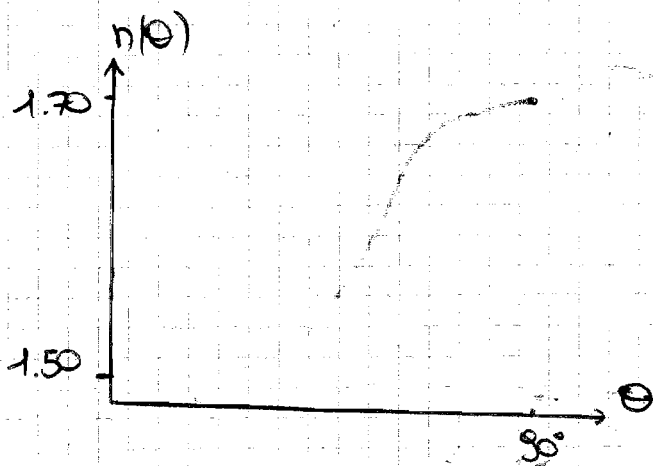
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$n(\theta) = n_e$$

Andamento di $n(\theta)$ per un cristallo equiaxiale uniaassico

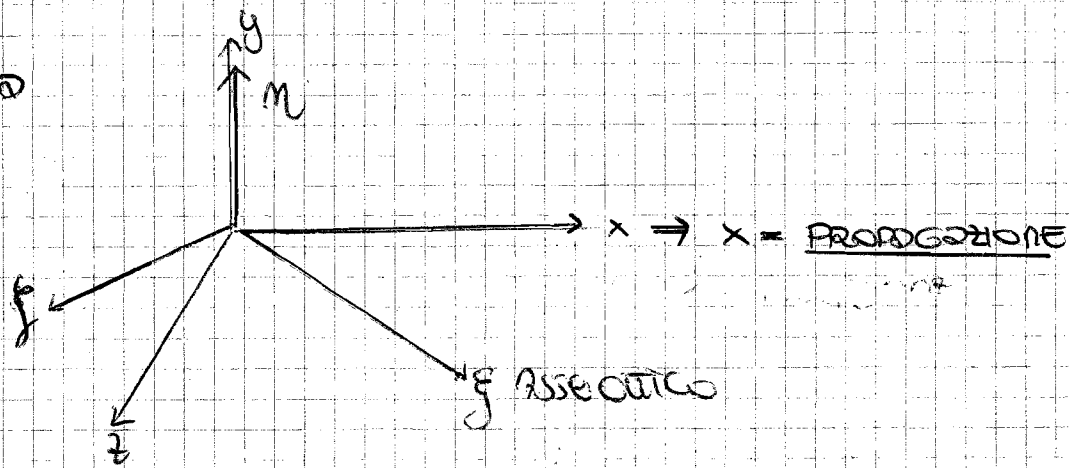
$$n_o = 1.50$$

$$n_e = 1.70$$

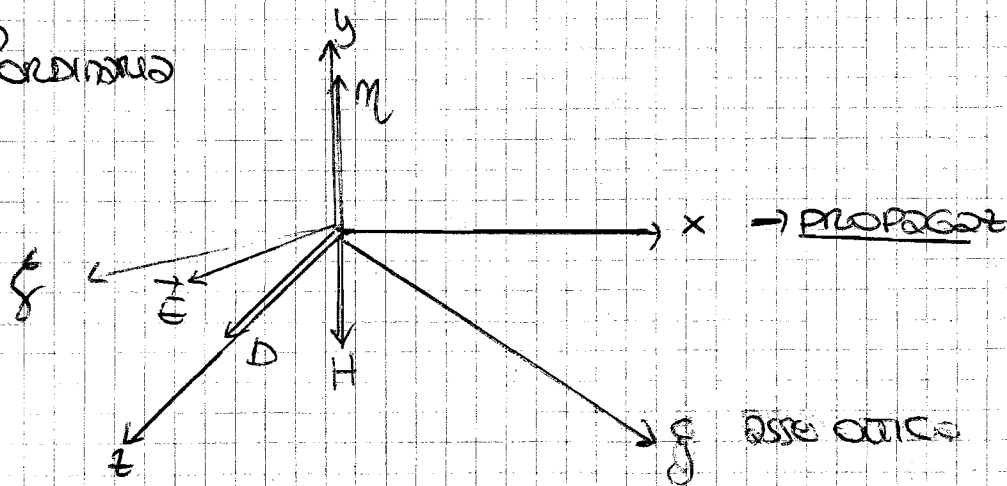


• ASSI PRINCIPALI: η, ξ, ζ

ONDA ORDINARIA



ONDA STRAORDINARIA



Conclusioni

① In un cristallo uniaassico per l'onda straordinaria \vec{E}, \vec{D} e l'asse ottico giacciono nello stesso piano.

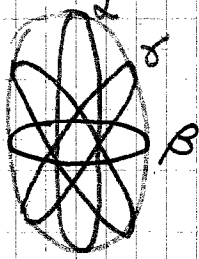
② In un'onda linearm polarizzata, $\vec{E}, \vec{D}, \vec{E}$ sono complanari.

• Per ogni direz di propagaz ci sono solo 2 onde che soddisfanno $\vec{E} \perp \vec{D}$.

1: Onda in cui il vettore elettrico è normale all'asse ottico
 $\vec{E} \perp \vec{D}$
ONDA ORDINARIA

2: Onda in cui il vettore ottico giace in un piano contenente l'asse ottico e la sua direz di propagaz
 $\vec{E} \parallel \vec{D}$
ONDA STRAORDINARIA

• Nel cristallo bassico ha 3 indici, es Nico



• Calcite

$$n_o = 1.6584$$

$$n_e = 1.4864$$

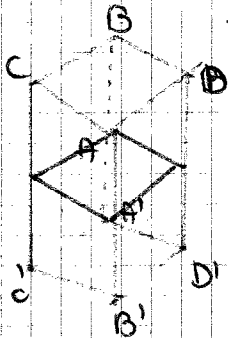
Uniaxiale

• Il diamante è isotropo.

Applicazioni:

I materiali anisotropi si usano per lo studio di luce polarizzata.

Es: PRISMO DI NICOL è fatto di calcite, cristallo negativo



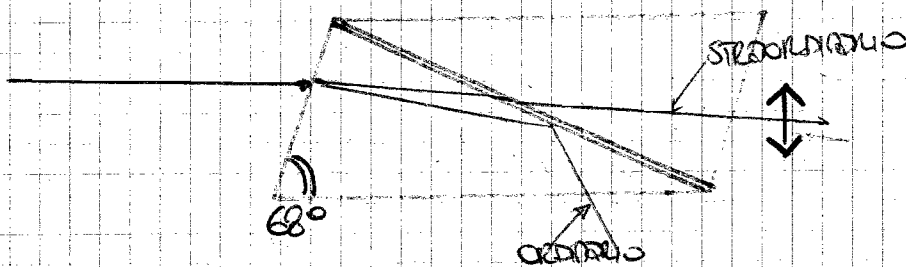
Romboedro con asse ottico // asse di simmetria.
Le facce terminali sono tagliate artificialmente in modo che $\angle ABA' = \angle A'BA = 68^\circ$

Il cristallo viene tagliato lungo un piano passante per A e A', normale alla diagonale minore delle facce terminali, con balsamo del Canada con $n = 1.526$ (interm fra 1.66 e 1.48)

Le dimensioni del prisma sono scelte in modo che il balsamo sia il piano contenente l'asse ottico e la normale alle facce terminali.

Qnd l'onda luminosa entra si divide in ordinaria e straordinaria.

L'onda straordinaria vede $n < n_o \Rightarrow$ può superare l'angolo limite, riflessione totale.
Passa sotto la straordinaria.



Onda lineare polarizzata nel piano della sezione principale.

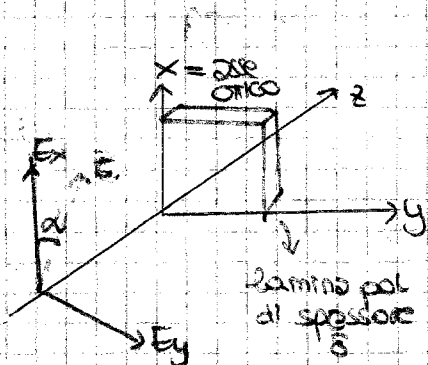
• Condizione \Rightarrow onda ordinaria $\theta > \theta_{\text{limite}}$

\rightarrow Se sbaglio l'angolo di incidenza non passa. Se orientare il cristallo posso sfare di accettante e anche lo straordinario (ho infatti n variabile, può superare n_o)

• Pò pungere da analizzatore e polarizzatore

Tenendo fermo un prisma e notando la sez principale del secondo.

ES LAMINA BISTABILITRICE (di calcare) di materiale uniaassico



$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \delta$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 \delta$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta (n_2 - n_1)$$

Se $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ ho una polarizzata ellittica, se $E_x = E_y$ andare
 \downarrow
 $\alpha = 45^\circ$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta (n_2 - n_1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\delta = \frac{\lambda_0}{4} \cdot \frac{1}{n_2 - n_1}$$

δ A QUARTO D'ONDA

↓
 2 SECONDO ONDA LUNGHEZZA D'ONDA VUOL δ

$$n_2 - n_1 \approx 0.18$$

Se $\lambda = 589 \text{ nm}$ $\delta \approx 10^{-5} \text{ cm}$

Ma inu che $\frac{\pi}{2}$ se scelgo $(n+1)\frac{\pi}{2}$ ottengo spessori fattibili.

Se mando luce naturale su una lamina a quarto d'onda

Qnd escono dalla lamina le 2 componenti sfaseranno,
 la loro direz è ancora casuale
 \Rightarrow ho ancora luce naturale.

Può invece polarizzare ellittica luce polarizzata lineare
 \downarrow
 o circolare per $\alpha = 45^\circ$

Analisi luce polarizzata

- Intensità nulla per una certa diret dell'osservatore
 \Rightarrow luce polarizzata lineare
- Intensità uguale per tt le orientaz dell'osservatore: la luce può essere naturale e/o polarizzata circolare.
- Intensità variabile con max e min: o è naturale polarizzata lineare o è ellittica.

SPERIMENTAZIONE

ROSSI L. WOLF "OPTICA"

ROSSI

Cap 2
 6

55-68.
 289-290

metodi non omogenei
 polarizzati